

Algebra und Zahlentheorie.

Schur, I.: Untersuchungen über algebraische Gleichungen. I. Bemerkungen zu einem Satz von E. Schmidt. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 7/10, 403—428 (1933).

Im Anschluß an eine Arbeit von E. Schmidt (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1932; dies. Zbl. 5, 363) beweist Verf. folgende Sätze: 1. Jeder Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0 \quad (a_0, a_n \neq 0) \quad (1)$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten ordne man den Ausdruck

$$P = \frac{1}{\sqrt[n]{a_0 a_n}} (|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|)$$

zu. r bezeichne die Anzahl der reellen Wurzeln (mehrfache Wurzeln mehrfach gezählt), dann ist stets: $r^2 - 2r < 4n \cdot \log P$. — 2. Für $n > 6$ gilt sogar: $r^2 < 4n \cdot \log P$. — 3. Ist a eine positive Konstante, die unterhalb 4 liegt, so lassen sich Gleichungen beliebig hohen Grades angeben, für die die Anzahl r der reellen Wurzeln der Forderung $r^2 > a \cdot n \cdot \log P$ genügt. — Ordnet man der obigen Gleichung den Ausdruck

$$Q = \frac{1}{|a_0 a_n|} (|a_0|^2 + \dots + |a_n|^2)$$

statt P zu, so gilt: Besitzt die Gleichung (1) mindestens p positive und q negative reelle Wurzeln, so wird

$$p^2 + q^2 - p - q \leq n \cdot \log \frac{Q}{2} \quad \text{oder} \quad p^2 + q^2 - |p - q| \leq n \cdot \log \frac{Q}{2},$$

je nachdem $n - p - q$ gerade oder ungerade ist. Weiß man, daß die Gleichung (1) mindestens r reelle Wurzeln besitzt, so wird $r^2 - 2r \leq 2 \cdot n \cdot \log \frac{Q}{2}$. Für $n > 6$ wird $r^2 < 2 \cdot n \cdot \log Q$, und es läßt sich für keine Konstante $a < 2$ eine Zahl N angeben, von der behauptet werden kann, daß für $n > N$ stets $r^2 < a \cdot n \cdot \log Q$ wird. — Der Minimalwert $M_{p,q,n}$ von Q bei Gleichungen der Form (1) mit mindestens p positiven und q negativen reellen Wurzeln berechnet sich zu $M_{p,q,n} = 2K_{p,q,n}$ oder $M_{p,q,n} = 2K_{p,q+1,n}$, je nachdem $n - p - q$ gerade oder ungerade ist, wobei

$$K_{p,0,n} = k_1 \cdot k_2 \dots k_{p-1} \quad (p \geq 2), \quad K_{p,q,n} = \frac{k_1 \cdot k_2 \dots k_{p+q-1}}{k_{p-q+1} \cdot k_{p-q+3} \cdot k_{p-q+5} \dots k_{p+q-1}} \quad (q \geq 1)$$

mit $k = \frac{n+\nu}{n-\nu}$ ($\nu = 1, 2, n-1$) und $p \geq q$ ist (hierauf kann man sich beschränken, da $M_{p,q,n} = M_{q,p,n}$ ist). — Verf. verallgemeinert noch das Problem für das Aufsuchen des Minimums, indem er für die Größe Q noch folgende Minimaleigenschaft ableitet: Hält man einige Wurzeln der Gleichung (1) fest und läßt man die übrigen Wurzeln längs vorgeschriebener, vom Nullpunkt ausgehender Halbstrahlen wandern, so erhält der Ausdruck Q seinen kleinsten Wert, wenn die sich ändernden Wurzeln auf den Einheitskreis fallen. — Schließlich kann Verf. noch das Minimum $M_n(g)$ von allen Größen Q berechnen, die denjenigen Gleichungen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (a_0, a_n \neq 0)$$

zugeordnet sind, die das fest vorgegebene Polynom

$$g(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_r x^r \quad (\gamma_0 = 1, \gamma_r \neq 0)$$

mit $r < n$ als Teiler besitzen.

Wegner (Darmstadt).

Campbell, A. D.: Pseudo-covariants of an n -ic in m variables in a Galois field that consist of terms of this n -ic. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 252—256 (1933).

Die Formen

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum a_{ij\dots k} x_1^i x_2^j \dots x_m^k \quad (1)$$

mit Koeff. aus einem $GF(p^n)$ bilden einen Modul M , der bei linearen Transformationen der x_i linear in sich transformiert wird. Diejenigen Formen, deren Glieder $x_1^i x_2^j \dots x_m^k$ je mindestens einen Exponenten $\geq p$ enthalten, bilden einen bei diesen Transformationen invarianten Untermodul N_1 . Jeder Form f ist also in invarianter Weise eine Restklasse von M/N_1 zugeordnet, und diese Restklasse kann (eindeutig, aber nicht invariant) durch die Teilsumme

$$\sum a_{rs\dots t} x_1^r x_2^s \dots x_m^t \quad (r < p, s < p, \dots, t < p) \quad (2)$$

von (1) repräsentiert werden. Daher wird (2) eine Pseudo-Kovariante von (1) genannt. In derselben Weise werden weitere Teilmoduln $N_2, N_3, \dots, P_1, P_2, \dots$ definiert, wo N_2 besteht aus allen Polynomen, in deren Gliedern je mindestens 2 Exponenten $\geq p$ vorkommen, ebenso P_1 aus allen Polynomen, in deren Gliedern mindestens ein Exponent $\geq p^2$ vorkommt, während alle anderen Exponenten $\geq p$ sind, usw. Die Restklassenmoduln $N_1/N_2, N_2/N_3, \dots$ vermitteln Darstellungen der linearen Gruppe und bestimmen ebenso viele Pseudo-Kovarianten. Die Determinanten der Transformationen dieser Darstellungen sind Potenzen der Determinante der Transformation der x_i , deren Exponenten in einigen Fällen berechnet werden. *van der Waerden* (Leipzig).

Bell, E. T.: Finite ova. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 577—579 (1933).

Ein System von Elementen, zwischen denen eine Gleichheitsrelation erklärt ist, heißt ein „Ovum“, wenn je zwei Elementen a und x eindeutig ein Produkt ax zugeordnet ist, das auch im Ovum liegt, und wenn aus $a = b, x = y$ folgt $ax = by$. Gilt außerdem das kommutative bzw. assoziative Gesetz, so spricht Verf. von einem kommutativen bzw. assoziativen Ovum. Es werden aus der Gruppentheorie bekannte Begriffe auf diese allgemeineren Systeme übertragen. *Köthe* (Münster).

Mori, Shinziro: Struktur des Sonoschen Ringes. J. Sci. Hiroshima Univ. A **2**, 181 bis 194 (1932).

Untersucht werden die kommutativen Ringe, in denen es zu jedem Ideal $a \neq (0)$ eine mit a beginnende Hauptreihe gibt („Sonosche Ringe“). Zugleich erstreckt sich die Betrachtung auf endliche Ketten zu einem festen Primideal \mathfrak{p} gehöriger Primärideale, in denen jedes folgende Ideal ein echter Teiler des vorhergehenden ist und nirgends ein zu \mathfrak{p} gehöriges Primärideal eingeschaltet werden kann. Bei allen Untersuchungen wird der Teilerkettensatz vorausgesetzt. *W. Weber* (Göttingen).

Mori, Shinziro: Über Sonosche Reduktion von Idealen. J. Sci. Hiroshima Univ. A **2**, 195—206 (1932).

Die Arbeit beschäftigt sich mit denjenigen Idealen eines kommutativen Ringes mit Teilerkettensatz, die genau ein höchstes Primideal haben — sie werden hier „Primärideale im Sinne von Sono“ genannt —, insbesondere auch mit ihren Beziehungen zu den Primäridealen im gewöhnlichen Sinne. Unter Voraussetzung einer früheren Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. **3**, 294) ergibt sich die Möglichkeit einer kürzesten Darstellung jedes Ideals als Durchschnitt derartiger Ideale. Es werden ferner die anschließenden Eindeutigkeitsfragen untersucht, insbesondere auch die Frage der eindeutigen Darstellung durch minimale „Primärideale“. *W. Weber* (Göttingen).

Mori, Shinziro: Axiomatische Begründung des Multiplikationsringes. J. Sci. Hiroshima Univ. A **3**, 43—59 (1932).

Der Krullsche Begriff des Multiplikationsringes war durch Akizuki in der folgenden abgeschwächten Fassung eingeführt worden: Ein kommutativer Ring mit Teilerkettensatz heißt Multiplikationsring, wenn in ihm aus echter Teilbarkeit von Idealen Produktdarstellung folgt. Verf. untersucht nun die Einordnung beider Arten von Multiplikationsringen in eine Stufenfolge axiomatisch erklärter Ringe. *W. Weber*.

Mori, Shinziro: Über ganz abgeschlossene Ringe. J. Sci. Hiroshima Univ. A **3**, 165 bis 175 (1933).

Gegenstand der Arbeit sind die Eigenschaften der aus lauter Nullteilern bestehenden Ideale eines Ringes \mathfrak{R} im Gegensatz zu den übrigen („regulären“) Idealen. Es wird zunächst untersucht, wann die regulären Ideale (unter gewissen Voraussetzungen

über \mathfrak{R}) sich als Produkte von Primidealen darstellen lassen. Untersuchungen über verschiedene Eigenschaften der beiden Idealgattungen schließen sich an; sie setzen für \mathfrak{R} die ganze Abgeschlossenheit und den Teilerkettensatz voraus. *W. Weber.*

Scholz, Arnold: Idealklassen und Einheiten in kubischen Körpern. *Mh. Math. Phys.* 40, 211—222 (1933).

Es handelt sich um den Zusammenhang zwischen Einheiten und Idealklassengruppe eines nicht zyklischen Galoisschen Körpers 6. Grades K_6 im Vergleich zu den entsprechenden Größen in dem quadratischen Unterkörper K_2 und einem der kubischen Unterkörper K_3 . Dieser Zusammenhang wird aus der Zerlegung des „Temperaments“

$T = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}$ in die Faktoren $T_6 = T_2 T_3^2$ (jeder Körper wird durch den Grad als Index gekennzeichnet) gewonnen. Aus gruppentheoretischen Überlegungen folgt, daß der Klassenzahlenquotient $h_2 h_3^2 / h_6$ nur eine Potenz von 3 sein kann. Und zwar gilt für imaginäre K_2 : Ist die Grundeinheit von K_3 auch Grundeinheit in K_6 , so ist $h_2 h_3^2 / h_6 = 3$; ist die Grundeinheit von K_3 dagegen $(S - 1)$ -te Potenz der Grundeinheit von K_6 (S die erzeugende Substitution der Relativgruppe K_6/K_2), so hat dieser Quotient den Wert 1. Ein weiterer Fall kann nicht eintreten. Ist K_6 total reell, so gibt es 3 Möglichkeiten für die Ausdehnung der Einheiten in K_6 über die durch die Einheiten von K_2 , K_3 und K_3^S erzeugte Einheitengruppe hinaus: 1. Die Grundeinheit von K_2 bildet mit den beiden Grundeinheiten von K_3 und deren konjugierten ein Fundamentalsystem in K_6 ; $h_2 h_3^2 / h_6 = 9$. — 2. Eine der Grundeinheiten von K_3 ist $(S - 1)$ -te Potenz einer Einheit in K_6 ; $h_2 h_3^2 / h_6 = 3$. — 3. Beide Grundeinheiten von K_3 sind $(S - 1)$ -te Potenzen von Einheiten in K_6 ; $h_2 h_3^2 / h_6 = 1$. — Setzt man K_6 als unverzweigt über K_2 voraus, so ist K_6 ein Teil des absoluten 3-Klassenkörpers von K_2 . Mit Hilfe des Artinschen Reziprozitätsgesetzes läßt sich zeigen, daß in diesem Falle stets $h_2 h_3^2 / h_6 = 3$ oder 9 ist und überdies lassen sich gewisse Bedingungen für die Struktur der zweistufigen Relativgruppe des 2. Klassenkörpers über K_2 schließen, da dieser den Klassenkörper von K_6 enthält. Insbesondere ergibt sich, daß nicht jede zweistufige Gruppe als Relativgruppe eines 2. Klassenkörpers über einem quadratischen Körper auftreten kann. *Taussky (Wien).*

Vassiliou, Ph.: Bestimmung der Führer der Verzweigungskörper relativ-abelscher Zahlkörper. Beweis der Produktformel für den Führer-Diskriminanten-Satz. *J. reine angew. Math.* 169, 131—139 (1933).

Geht \mathfrak{p} in der Diskriminante des relativ-abelschen Körpers K/k auf, so bietet die Bestimmung des Anteils von \mathfrak{p} am Führer von K/k und an den Führern der Zwischenkörper besondere Schwierigkeiten in dem Fall, daß Verzweigungskörper auftreten. Verf. beweist die von Hasse für diesen Fall aufgestellten Formeln und Sätze auf einfacherem Wege und benutzt sie dann zum Beweis der expliziten Formel für die χ -Führer, die Artin angegeben hat. Die Führerformel liefert unmittelbar die Formel $\mathfrak{b} = \prod f_\chi$ für die Diskriminante. Als Hilfsmittel dient ein Satz von Herbrand über die Bestimmung der Hilbertschen Untergruppenreihe eines Primideals für einen galoisschen Körper K^*/k aus der Hilbertschen Untergruppenreihe für einen umfassenderen galoisschen Körper K/k . [J. Herbrand, Sur la théorie des groupes de décomposition, d'inertie et de ramification, *J. Math.* 10 (1931); dies. Zbl. 3, 147]. Anwendungen über den Wertevorrat des Normenrestsymbols stehen in Zusammenhang mit den Untersuchungen von Iyanaga. [S. Iyanaga, Über den Wertvorrat des Normenrestsymbols, *Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.* 9, 159—165 (1932); dies. Zbl. 5, 388.] *Deuring.*

Noether, Emmy: Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und Zahlentheorie. (*Zürich, Sitzg. v. 5.—12. IX. 1932.*) *Verh. internat. Math.-Kongr.* 1, 189—194 (1932).

Die Bedeutung der Algebren für die kommutative Algebra und die Zahlentheorie wird am Normensatz und am Hauptgeschlechtssatz der Klassenkörpertheorie näher erläutert. Der Normensatz ist ein Satz über relativzyklische Zahlkörper: Dann und

nur dann ist eine Zahl eines Zahlkörpers k Norm einer Zahl aus einem zyklischen Erweiterungskörper Z , wenn sie für jede Primstelle p von k Norm einer Zahl aus dem p -adischen Körper Z_p ist. Eine Folgerung aus diesem Satze, die ihn umgekehrt als Spezialfall enthält, ist der Satz: Ist jede p -adische Erweiterung einer Algebra \mathfrak{A} über einem Zahlkörper volle Matrixalgebra, so ist \mathfrak{A} selbst volle Matrixalgebra. Aus diesem allgemeinen Satz, dessen Formulierung nichts von speziellen Körpertypen enthält, kann man wieder Rückschlüsse auf beliebige galoissche Zahlkörper machen. Auf diese Weise hat Verf. eine Verallgemeinerung des im Zusammenhang mit dem Normensatz stehenden Hauptgeschlechtssatzes aus der Theorie der relativzyklischen Körper auf beliebige galoissche Körper gegeben. In den gleichen Ideenkreis gehören Hasses Untersuchungen über den Zusammenhang des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes mit der Algebrentheorie und die neue Begründung der Normenresttheorie durch Chevalley. Andersartige Anwendungen der Algebren auf die kommutative Algebra sind die Untersuchungen von Speiser, Noether, Deuring über galoissche Theorie und über Diskriminanten, in denen die Algebra einer galoisschen Gruppe als nichtkommutatives Hilfsmittel verwendet wird. Näheres in den folgenden Arbeiten: H. Hasse, Theory of cyclic Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **4**, 171—214 (1932); dies. Zbl. **3**, 386. — Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. **107**, 731—760 (1933); dies. Zbl. **6**, 152. — R. Brauer, H. Hasse, E. Noether, Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, J. reine angew. Math. **167**, 147—152 (1931); dies. Zbl. **3**, 244. — Cl. Chevalley, La théorie du symbole de restes normiques, J. reine angew. Math. **169**, 140—157 (1933); dies. Zbl. **6**, 292. — A. Speiser, Gruppendeterminante und Körperdiskriminante, Math. Ann. **77**, 546—562 (1916). — E. Noether, Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung, J. reine angew. Math. **167**, 147—152; dies. Zbl. **3**, 146. — M. Deuring, Galoissche Theorie und Darstellungstheorie, Math. Ann. **107**, 140—144 (1932); dies. Zbl. **5**, 6.)

Deuring (New Haven).

● Beeger, N. G. W. H.: Additions and corrections to „Binomial factorisations“ by A. J. C. Cunningham. Amsterdam: Selbstverlag 1933. 12 S.

Veen, S. C. van: Über das Reziprozitätsgesetz für quadratische Reste. Mathematica (Leiden) **1**, 148—153 (1933) [Holländisch].

This paper gives a method of establishing the reciprocity law for quadratic residues, the familiar lemma of Gauß being assumed. The method is a variation of Eisensteins elegant lattice point method.

D. H. Lehmer (Chicago).

Kapferer, H.: Über die diophantischen Gleichungen $Z^3 - Y^2 = 3^3 \cdot 2^\lambda \cdot X^{\lambda+2}$ und deren Abhängigkeit von der Fermatschen Vermutung. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. Abh. **2**, 32—37 (1933).

Verf. beweist den folgenden Hauptsatz: „Die Existenz einer Lösung der Gleichung

$$z^3 - y^2 = 3^3 \cdot 2^{n-2} \cdot x^{n+2} \quad (1)$$

in drei ganz rationalen Zahlen x, y, z , von denen je zwei teilerfremd sind, ist für jede natürliche Zahl $n = 2, 3, \dots$ gleichbedeutend mit der Existenz einer Lösung der Fermatschen Gleichung

$$u^n - v^n = w^n \quad (2)$$

Auf Grund dieses Satzes läßt sich die Fermatsche Vermutung über die Unlösbarkeit der Gleichung (2) in folgender Gestalt aussprechen: „Die Gleichungen

$$z^3 - y^2 = 3^3 \cdot 2^\lambda \cdot x^{\lambda+2} \quad (3)$$

sind für alle geraden Exponenten $\lambda \geq 4$ unlösbar in ganz rationalen Zahlen x, y, z , von denen je zwei teilerfremd sind.“ Verf. erhofft, daß die Methoden, die von anderen, namentlich Fueter, zur Behandlung der Gleichung $z^3 - y^2 = c$ angewandt worden sind, auch für die Gleichungen (1), (3) etwas ergeben werden. Der Beweis des Hauptsatzes beruht auf zwei auch an sich interessanten Hilfssätzen über die Gleichung $A^2 + 3B^2 = C^3$, deren Beweis sich in einfachster Weise aus der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung jeder ganzen Zahl des Körpers $K(\sqrt{-3})$ ergibt. Bessel-Hagen.

Mordell, L. J.: The number of solutions of some congruences in two variables. Math. Z. 37, 193—209 (1933).

Die Arbeit beschäftigt sich mit Spezialfällen der allgemeinen Aufgabe: Es sei ein ganzzahlnalzhiges Polynom $f(x, y)$ gegeben, das über dem endlichen Körper E_p von p Elementen (Restklassenkörper nach der Primzahl p) algebraisch irreduzibel ist. Es soll für die Anzahl N der Lösungen von $f(x, y) = 0$ in E_p eine Abschätzung

$$|N - p| \leq Ap^{\varrho} \quad (A)$$

hergeleitet werden, wo ϱ ein möglichst kleiner Exponent < 1 und A eine positive Konstante ist, die beide nicht von p und auch nicht von der besonderen Wahl der Koeffizienten von f (innerhalb der zuvor angegebenen Bedingungen) abhängen, sondern nur von den algebraischen Invarianten des durch $f(x, y) = 0$ über E_p bestimmten algebraischen Funktionenkörpers K . — Die endgültige Lösung dieser allgemeinen Fragestellung hängt, wie ich hier von mir aus vorausbemerken möchte, mit dem Analogon der Riemannschen Vermutung für die K zugeordnete F. K. Schmidtsche Kongruenzzetafunktion $\zeta_K(s)$ zusammen. Bei richtiger Mitzählung der unendlichen Lösungen wird nämlich N die Anzahl der Primdivisoren ersten Grades von K , und die Theorie von $\zeta_K(s)$ ergibt, daß ϱ als die maximale Abszisse ϑ der Nullstellen von $\zeta_K(s)$ gewählt werden kann, und überdies $A = 2g$, wo g das Geschlecht von K ist. Zwar ist $\vartheta < 1$ bekannt, aber es steht allgemein noch keine von p unabhängige obere Abschätzung von ϑ fest. Das Analogon der Riemannschen Vermutung, $\vartheta = \frac{1}{2}$, würde besagen, daß $\varrho = \frac{1}{2}$ wählbar ist. Umgekehrt folgt aus einer Feststellung (A) für K selbst und analog für alle aus K durch Erweiterung des Koeffizientenkörpers E_p auf E_{p^r} ($r = 1, 2, \dots$) entstehenden Körper $K^{(r)}$ (mit beiderseits p^r statt p sowie ϱ, A auch von r unabhängig), daß $\vartheta \leq \varrho$ ist, also für $\varrho = \frac{1}{2}$ insbesondere das Analogon der Riemannschen Vermutung für K . — Der Verf. setzt diesen Zusammenhang in seiner Arbeit nur in den hyperelliptischen Fällen $f(x, y) = y^2 - f(x)$ auseinander, wo es sich um die speziellen Artinschen Kongruenzzetafunktionen handelt. Er beweist für diese Fälle die Teilresultate: Man hat (A) mit

$$\varrho = \frac{2}{3}, \text{ falls } f(x) \text{ vom Grade 3 oder 4,}$$

$$\varrho = \frac{1}{3}, \text{ falls } f(x) \text{ vom Grade 5 oder 6,}$$

und $f(x)$ [zur Herstellung der algebraischen Irreduzibilität von $f(x, y)$] als kein algebraisches Quadrat vorausgesetzt ist. Ferner beweist er (A) mit

$$\varrho = \frac{1}{2} \text{ für } f(x, y) = y^3 - f(x), \text{ wo } f(x) \text{ höchstens vom Grade 3,}$$

$$\varrho = \frac{5}{6} \text{ für } f(x, y) = y^4 - f(x), \text{ wo } f(x) \text{ höchstens vom Grade 4,}$$

und wo wieder zudem $f(x)$ als kein algebraischer Kubus bzw. kein algebraisches Quadrat vorausgesetzt ist; weiter allgemein (A) mit

$$\varrho = \frac{3}{4} \text{ für } f(x, y) = y^m - f(x), \text{ wo } f(x) \text{ höchstens vom Grade 3 und } m > 3,$$

und speziell (A) mit

$$\varrho = \frac{1}{2}, A = \sqrt{mn(m+1)(n+1)}$$

$$\text{für } f(x, y) = ax^m + by^n + c; \ a, b, c \neq 0 \text{ und o B. d. A. } m | p - 1, \ n | p - 1.$$

Das letztere verschärft bekannte aus der Beziehung zur Fermatschen Vermutung entsprungene Resultate von Dickson, I. Schur und Hurwitz. Schließlich beweist der Verf. (A) mit

$$\varrho = \frac{2}{3} \text{ für allgemeines algebraisch irreduzibles kubisches } f(x, y)$$

und speziell (A) mit

$\varrho = \frac{1}{2}$ für algebraisch irreduzibles kubisches $f(x, y)$, das als Summe von drei Linearformkuben darstellbar ist.

Die Methode des Verf. zur Gewinnung dieser Resultate besteht in der Darstellung der abzuschätzenden Lösungsanzahlen durch Exponentialsummen mit Potenzcharakteren, passende Mittelbildung über alle Polynome von jeweils gleichem Typus und Ausnutzung der Invarianz der Lösungsanzahl bei Transformationen dieses Polynontypus in sich. — Ich möchte hinzufügen, daß die Resultate des Verf. durchweg fast wörtlich auf den Fall eines beliebigen endlichen Körpers E_{p^r} statt E_p als Koeffizientenkörper übertragbar sind, und so nach dem eingangs Gesagten zu oberen Abschätzungen der maximalen Nullstellenabszisse ϑ durch das jeweilige ϱ und, soweit $\varrho = \frac{1}{2}$ festgestellt ist, zum Beweis des Analogons der Riemannschen Vermutung für die betreffende F. K. Schmidtsche Kongruenzzetafunktion führen.

Hasse (Marburg, Lahn).

Hölder, Otto: Über gewisse der Möbiuschen Funktion $\mu(n)$ verwandte zahlentheoretische Funktionen, die Dirichletsche Multiplikation und eine Verallgemeinerung der Umkehrungsformeln. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 85, 3—28 (1933).

Verf. benutzt die formale Multiplikation Dirichletscher Reihen

$$\sum_1^\infty a_n n^{-s} \sum_1^\infty b_n n^{-s} = \sum_1^\infty c_n n^{-s},$$

um zahlreiche Identitäten herzuleiten. Ist z. B. $c_1 = 1$, $c_n = 0$ für $n > 1$; $F(x)$ [oder $G(x)$] für $x > 0$ definiert, für $x < 1$ Null, so gilt

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a_n F\left(\frac{x}{n}\right) \rightarrow F(x) = \sum_{n \leq x} b_n G\left(\frac{x}{n}\right),$$

weil

$$\sum_{n \leq x} a_n F\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} c_n G\left(\frac{x}{n}\right).$$

Ist weiter $x \geq 1$, $F(x) = \sum_{n \leq x} b_n$, so wird $G(x) = \sum_{n \leq x} c_n = 1$, und ebenso $F(x) = 1$ für $G(x) = \sum_{n \leq x} a_n$. Für $a_n = \mu(n)$, $b_n = 1$ ergeben sich hieraus bekannte μ -Beziehungen. Man darf aber auch setzen:

$$a_n = \mu_k(n), \quad b_n = \nu_k(n), \quad \text{wo} \quad \sum_1^\infty \mu_k(n) n^{-s} = \zeta(ks)/\zeta(s),$$

$\sum_1^\infty \nu_k(n) n^{-s} = \zeta(s)/\zeta(ks)$; $k = 2, 3, \dots$. Weitere $\mu_k - \nu_k$ -Formeln ergeben sich durch Ausmultiplizieren von Zetas, etwa $\zeta(s) \cdot \frac{\zeta(ks)}{\zeta(s)}$ usw. Schließlich betrachtet Verf. auch noch einige andere zahlentheoretische Funktionen. *A. Walfisz* (Radość, Polen).

Analysis.

● **Kowalewski, Gerhard:** Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen. Bearb. nach den Vorlesungen. Bd. 2. Hauptpunkte der analytischen Geometrie des Raumes. Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung. Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1933. 240 S. u. 18 Fig. geb. RM. 3.80.

Brand, Louis: Non-analytic functions of a complex variable. Amer. Math. Monthly 40, 260—265 (1933).

Ein ebenes Vektorfeld wird als komplexe Funktion der Veränderlichen $x + iy$ und $x - iy$ geschrieben; die Divergenz und die Rotation des Feldes, sowie der Gaußsche Integralsatz (als „Verallgemeinerung“ des Cauchyschen) werden in dieser Schreibweise angegeben.

Willy Feller (Kiel).

Hornich, Hans: Bemerkungen zu der Arbeit „Über eine Minimalaufgabe im Gebiet der analytischen Funktionen“ von W. Wirtinger. Mh. Math. Phys. 40, 209—210 (1933).

Gewisse Ergänzungen zur genannten Arbeit von Wirtinger (dies. Zbl. 5, 361). Insbesondere wird von der Funktion Φ , die im Problem $i \int (\Phi - f)(\bar{\Phi} - \bar{f}) dz d\bar{z} = \text{Min}$ auftritt, nur Stetigkeit verlangt. Damit ein Minimum existiert, muß $\Phi = H +$ analytische Funktion von z sein, wo $\int \bar{\varphi} H dz d\bar{z} = 0$ ist für alle analytischen φ . *Rellich*.

Vignaux, J. C.: Sur l'extension du théorème de Dirichlet aux intégrales doubles convergentes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 109—112 (1933).

Gilham, C. W.: Some algebraic integrals with rational values. J. London Math. Soc. 8, 136—141 (1933).

In this paper the author derives the invariant conditions for the rationality of the integral, $\int \frac{f dx}{\Phi^2}$, where f is a polynomial of degree $2n - 2$ and Φ is a polynomial of degree n . He employs symbolic methods familiar in the theory of invariants, which lead to neatly expressed conditions. Thus for the case $n = 3$, the condition sought is the identical vanishing of the expression, $(\Theta_1, \Phi)^1$, where we abbreviate, $\Theta_1 = (f, \Phi)^2$. The author gives explicit conditions for the cases, $n = 3, 4, 5, 6$ and 7. Results obtained by M. Hanna (see this Zbl. 3, 249) are derived in this paper. *H. T. Davis*.

Cioranescu, Nicolas: Quelques inégalités relatives aux fonctions monotones. Bul. fac. şti. Cernăuţi 6, 166—169 (1933).

Einige rekursive Ungleichungen für die Momente und die Fourierkoeffizienten

der monotonen Funktionen als unmittelbare Folgerung aus dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Willy Feller (Kiel).

Ingham, A. E.: An integral which occurs in statistics. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 271—276 (1933).

Es wird das Integral

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{p(p+1)}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \sum c_{\mu, \nu} t_{\mu, \nu}} |A_p - i T_p|^{-k} \prod_{\mu \leq \nu} dt_{\mu, \nu},$$

welches bei einigen statistischen Problemen auftritt, explizit ausgewertet. Dabei sind $A_p = (a_{\mu, \nu})$ und $C_p = (c_{\mu, \nu})$ reelle symmetrische Matrizen und speziell A positiv definit. Der Verf. gewinnt im Fall $k < \frac{p+1}{2}$ den Ausdruck $J(C_p, k) e^{-\sum c_{\mu, \nu} a_{\mu, \nu}}$, wobei für positiv definite C_p

$$J(C_p, k) = \frac{|C_p|^{k - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}}}{\frac{p(p-1)}{(2\sqrt{\pi})^2} \Gamma(k) \dots \Gamma(k - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2})}$$

und andernfalls $J(C_p, k) = 0$ gilt.

Lüneburg (Göttingen).

Fejér, L.: Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen. Math. Z. 37, 287—309 (1933).

L'auteur expose d'abord le résultat classique de Stieltjes que la formule de quadratures mécanique de Gauss est convergente quelle que soit la fonction bornée et intégrable au sens de Riemann. Le résultat principal de l'auteur est la démonstration du fait que la convergence a lieu dans les mêmes conditions toutes les fois, où les coefficients correspondants de Cotes sont non négatifs. Il en est ainsi, en particulier, comme l'établit l'auteur, lorsque les racines sont les racines des polynôme de Tchebycheff ou de sa dérivée ou bien les racines du polynôme $R_n(x) = P_n(x) + A P_{n-1}(x) + B P_{n-2}(x)$, où $P_n(x)$ représente le polynôme de Legendre de degré n , $B \leq 0$, en supposant qu'elles se trouvent toutes dans l'intervalle $(-1, +1)$. Il est démontré, enfin, que les coefficients de Cotes tendent tous vers 0, lorsqu'ils sont non négatifs.

S. Bernstein.

Pólya, G.: Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. Math. Z. 37, 264—286 (1933).

Verf. untersucht die Konvergenz von „Quadraturverfahren“ (Q) für vorgegebene Funktionsklassen. Unter einem (Q) versteht er zwei Schemata

$$x_{nj}; \lambda_{nj}, \quad (j = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, 3, \dots) \quad (Q)$$

wobei die x_{nj} einem gegebenen Intervall $[a, b]$ angehören. Zu jeder in $[a, b]$ definierten Funktion $f(x)$ gehört dann eine Folge von „Quadraturwerten“

$$Q_n[f] = \sum_{j=1}^n \lambda_{nj} f(x_{nj}),$$

für deren Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n[f] = \int_a^b f(x) dx \quad (K)$$

Bedingungen gesucht werden. Es seien die folgenden besonderen Klassen von Verfahren genannt. — 1. Man hat

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_{nj}| < L, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

wo L von n unabhängig ist. — 2. Es sei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathfrak{J}} |\lambda_{nj}| = A(\mathfrak{J}),$$

wo \mathfrak{J} einen Intervallverein (d. h. die Summe von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen aus $[a, b]$) bedeutet und die Summation über alle x_{nj} aus \mathfrak{J} zu erstrecken ist. Weiter bezeichne $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \dots$ eine beliebige absteigende Folge von Intervallvereinen, deren Länge gegen Null konvergiert. Es möge dann stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathfrak{J}_n) = 0$$

sein. — Es bedeute \mathfrak{P} die Klasse der Polynome, \mathfrak{S} und \mathfrak{R} die der in $[a, b]$ stetigen bzw. nach Riemann integrierbaren Funktionen. — Nach diesen Vorbereitungen können die Hauptresultate wie folgt ausgesprochen werden: a) Es sei (K) für die Klasse \mathfrak{P} richtig. Damit dies auch für \mathfrak{S} zutrifft, ist 1. notwendig und hinreichend. — b) Es sei (K) für die Klasse \mathfrak{S} richtig. Damit dies auch für \mathfrak{R} zutrifft, ist 2. notwendig und hinreichend. — Wesentlich schwieriger dürfte der Übergang von den Polynomen zu den analytischen Funktionen sein. Zu dieser Frage werden nur Beiträge geliefert. Dafür wird das klassische Newton-Cotes'sche Verfahren eingehend untersucht. — Das bei den Beweisen benutzte „Resonanzverfahren“ stellt eine sehr anschauliche Fassung eines auf Lebesgue zurückgehenden vielfach verwendeten Konstruktionsprinzips dar.

Szegő (Königsberg, Pr.).

Jackson, Dunham: Problems of approximation with integral auxiliary conditions. Amer. J. Math. 55, 153–166 (1933).

L'auteur étudie l'approximation des fonctions continues $f(x)$ dans l'intervalle a, b au moyen de polynômes de degré n rendant minimum l'intégrale

$$\int_a^b \varrho(x) |f(x) - P_n(x)|^m dx, \quad (m > 0) \quad (1)$$

en supposant que les polynômes $P_n(x)$ doivent satisfaire de plus à N relations indépendantes

$$\int_a^b \sigma(x) \Phi_i(x) P_n(x) dx = \int_a^b \sigma(x) \Phi_i(x) f(x) dx, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

où $\Phi_i(x)$ sont des fonctions continues données, $\varrho(x) \geq 0$, $\sigma(x) \geq 0$ sont deux fonctions sommables, dont la première est positive dans un ensemble de mesure positive, la seconde est positive dans une partie de mesure non nulle de chaque intervalle de (a, b) . On démontre d'abord que les conditions (2) ne changent pas l'ordre de grandeur de la meilleure approximation d'une fonction par des polynômes de degrés n croissants infiniment. De là on tire les théorèmes I et II de nature analogue, dont je me bornerai à indiquer le premier: si $m > 2$, les polynômes $P_n(x)$ convergent uniformément vers $f(x)$ dans tout intervalle (α_0, β_0) de (a, b) , où $\varrho(x) \geq b > 0$, pourvu que le module de continuité $\omega(\delta)$ de $f(x)$ satisfasse à la condition que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) \delta^{2/m} = 0$; lorsque $m = 2$, il suffit que $f(x)$ admette une dérivée continue pour $a \leq x \leq b$. Ensuite l'auteur étend ces résultats au cas où les conditions supplémentaires (2) sont remplacées par une relation quadratique et à celui, où les polynômes $P_n(x)$ sont remplacés par des sommes trigonométriques $S_n(x)$ d'ordre n .

S. Bernstein (Charkow).

Achyeser, N.: Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. I. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 9, 1163–1202 (1932).

En utilisant les fonctions elliptiques, l'auteur entreprend l'étude des polynômes d'écart minimum relatifs à deux intervalles $(-1, \alpha)$ et $(\beta, 1)$. Pour cette étude il introduit les polynômes en x :

$$T_n(x; m, k) = \frac{L}{2} \left\{ \left[\frac{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)} \right]^n + \left[\frac{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)} \right]^n \right\},$$

$$x = \frac{\operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{cn}^2 \frac{m}{n}K + \operatorname{cn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{m}{n}K}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \frac{m}{n}K}, \quad \text{où} \quad L = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{\theta(0) \theta_1(0)}{\theta\left(\frac{m}{n}K\right) \theta_1\left(\frac{m}{n}K\right)} \right]^{2n}.$$

Dans le cas, où l'on peut trouver un nombre entier $m < n$, tel que $\alpha = 1 - \operatorname{sn}^2 \frac{m}{n}K$, $\beta = 2m^2 \frac{n-m}{n}K - 1$, où K est une intégrale elliptique complète de première espèce

correspondant au module k avec un complémentaire $k' = \sqrt{1 - k^2}$, $T_n(x; m, k)$ joue rigoureusement le même rôle sur les deux intervalles considérés, que le polynôme trigonométrique de Tchebycheff ($k = 0$) pour le segment unique. Lorsque n croît infiniment, le polynôme d'écart minimum peut toujours être remplacé asymptotiquement par le polynôme considéré. *S. Bernstein* (Charkow).

Rückert, Walther: Über die Elimination bei Potenzreihen. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. Abh. 2, 29–32 (1933).

Zwei Bemerkungen zu einer früheren Arbeit über Elimination bei Potenzreihen (vgl. dies. Zbl. 5, 98). Es wird gezeigt, daß aus dem früher Bewiesenen fast unmittelbar die Gültigkeit des Hilbertschen Nullstellensatzes für Potenzreihen in n Variablen folgt. Ferner, daß sich die gemeinsamen Nullstellen eines Systems von Potenzreihen mit der Kroneckerschen Eliminationsmethode bestimmen lassen. *van der Waerden*.

Usai, Giuseppe: Sulla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n$ e su un triangolo aritmetico. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 131–133 (1933).

Libby, W. F.: A convergence test and a remainder theorem. Amer. Math. Monthly 40, 216–218 (1933).

Wenn $u(z)$ bei $z = \infty$ analytisch ist, so wird die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u(n)$ regulär genannt. Es gibt dann eine kleinste natürliche Zahl L so, daß für $n \geq L$

$$u(n) = c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots$$

ist. Jede konvergente reguläre Reihe, deren Koeffizienten reell und nichtnegativ sind, hat einen Summenwert S , der sich in der Form

$$S = \sum_{n=1}^{G+h} u(n) + \Theta u(G)$$

darstellen läßt, wo $G \geq L$ beliebig ist, $h \geq G^2 - G$ beliebig, und Θ eine reelle, zwischen 0 und 1 gelegene Größe ist, die von G und h abhängt.

R. Schmidt (Kiel).

Sansone, Giovanni: Sulle serie lacunari di polinomi di Legendre di funzioni sommabili. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 289–296 (1933).

L'auteur démontre pour les séries lacunaires des polynômes de Legendre des théorèmes analogues à ceux de Kolmogoroff et Szidon, connus pour les séries trigonométriques. — Soit

$$f(x) \infty \sum a_i P_{n_i}(x) \quad (1)$$

$$\left[-1 < x < +1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}; \quad n_{i+1}/n_i \geq q > 1 \quad (1) \text{ signifie: } a_i = \right.$$

$$\left. \frac{2n_i + 1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_{n_i}(x) dx, \quad \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = 0 \text{ si } n \neq n_i \right]. \text{ L'auteur démontre que}$$

$f(x)$ est de carré sommable et que presque partout $f(x) = \sum a_i P_{n_i}(x)$ (théorème analogue à celui de M. Kolmogoroff). Si en plus $f(x) < L < \infty$, la série $\sum a_i P_{n_i}(x)$ converge absolument et uniformément dans tout intervalle $(-1 + \eta, 1 - \eta)$ ($\eta > 0$) (théorème analogue à celui de Szidon). *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Leja, F.: Sur les facteurs de convergence des séries des fonctions analytiques. C. R. Soc. Sci. Varsovie 25, 4–6 (1933) [Polnisch].

Wiener, Norbert: A one-sided Tauberian theorem. Math. Z. 36, 787–789 (1933).

Es sei

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-n r e^{i\vartheta}) = s \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2} \right).$$

Jede der Größen na_n liege in dem Bereich

$$-\frac{\pi}{2} < -\alpha \leq \arg(na_n + B) \leq \alpha < \frac{\pi}{2},$$

wo α und B von n unabhängig sind. Es sei ferner $s_n = \sum_0^\infty a_n = O(n^m)$ für ein gewisses m . Dann ist

$$\sum_0^\infty a_n = s.$$

R. Schmidt (Kiel).

Rey Pastor, J.: Un semplice algoritmo di convergenza e sommazione. Period. Mat., IV. s. 13, 153–160 (1933).

Die Reihe $\sum_0^\infty u_n$, $s_n = \sum_0^{n-1} u_n$, heiße (M) -summierbar, wenn $\lim \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1})$ existiert.

Verf. untersucht diese Summation und die durch wiederholte Iteration daraus entstehenden; ihre Beziehungen zur (C) -Summierbarkeit und zur Multiplikation von Reihen.

Otto Szász (Frankfurt a. Main).

Vignaux, J. C.: Sur la sommabilité totale par la méthode de M. Borel. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 538–540 (1933).

Cette note donne sans démonstration quelques théorèmes relatifs à la sommabilité d'une série-produit des deux séries sommables — (B) et $|B|$ — par le procédé de M. E. Borel.

Kogbelliantz (Paris).

Adams, C. Raymond: On non-factorable transformations of double sequences. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 564–567 (1933).

Es handelt sich um eine Weiterführung einer früheren Arbeit des Verf. (Bull. Amer. Math. Soc. 37; dies. Zbl. 3, 112) über Transformationen von Doppelfolgen x_{kl} in neue Doppelfolgen y_{mn} mittels einer vierdimensionalen dreieckigen Matrix A :

$y_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{mnkl} x_{kl}$. Eine besondere Rolle für die Regularität von A spielte dabei die

Zerlegbarkeit (factorability) von A , die dann vorliegt, wenn $a_{mnkl} = a'_{mk} \cdot a''_{nl}$ ($m, n, k, l = 1, 2, \dots$). A' und A'' sind dabei als reguläre einfache Transformationen vorausgesetzt. Die Ergebnisse des Verf. waren inzwischen durch Lösch (Math. Z. 34 und 37; dies. Zbl. 2, 335; 6, 199) und Agnew (Amer. J. Math. 54; dies. Zbl. 5, 291) verschärft. Der Verf. zeigt durch ein Gegenbeispiel, daß man auf die Zerlegbarkeit von A nicht verzichten kann zugunsten eines Systems von weniger weitgehenden Voraussetzungen.

Neß (Kiel).

Differentialgleichungen:

Chiellini, Armando: Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 134–137 (1933).

L'Autore, utilizzando una proprietà generale delle equazioni differenziali lineari omogenee, determina una particolare classe di equazioni lineari del secondo ordine, riconducibili alle quadrature.

Autoreferat.

Fubini, Guido: Su un teorema di confronto per le equazioni del secondo ordine alle derivate ordinarie. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 283–284 (1933).

Beweis des Satzes: Es seien a, b konsekutive Nullstellen der Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$; es sei $Y(x)$ eine beliebige Lösung von $Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y = 0$ und es gelte in $a \leq x \leq b$ die Ungleichung $2P' + P^2 - 4Q < 2p' + p^2 - 4q$. Dann verschwindet $Y(x)$ in mindestens einem Punkt von $a \leq x \leq b$. Der Ausdruck $2p' + p^2 - 4q$ hat eine invariante Bedeutung: Geht man von einer Differentialgleichung $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ vermöge $y = \lambda z$ [$\lambda = \lambda(x) \neq 0$, zweimal stetig differenzierbar] zur Differentialgleichung $z'' + p_1 z' + q_1 z = 0$ für z über, so gilt in x identisch: $2p' + p^2 - 4q = 2p_1' + p_1^2 - 4q_1$.

Rellich (Göttingen).

Marković, Ž.: Über die periodischen Lösungen der linearen Differentialgleichung $2n$ -ter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Rad. jugoslav. Akad. Znan. i Umjetn. 246, 161–183 (1933) [Serbo-kroatisch].

Die betrachtete Differentialgleichung ist selbstadjungiert und von der Form

$$u^{(2n)} = p_2(x) \cdot u^{(2n-2)} + p_3(x) \cdot u^{(2n-3)} + \dots + p_{2n-1}(x) u' + [p_{2n}(x) + \lambda] u,$$

wobei die Koeffizienten p_k dieselbe Periode ω besitzen und zugleich mit ihrem Index gerade oder ungerade sind. Nachdem gewisse Relationen zwischen den Lösungen abgeleitet wurden, wird durch Zurückführung auf eine Fredholmsche Integralgleichung bewiesen, daß unendlich viele sich im Endlichen nicht häufende Eigenwerte λ_k existieren, für die es Lösungen mit der Periode ω gibt. Zu einem Eigenwert können nicht gleichzeitig gerade und ungerade periodische Lösungen gehören. *W. Feller.*

Rosenblatt, Alfred: Sur les problèmes aux limites des équations différentielles ordinaires du second ordre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 87—89 (1933).

Ist $0 < \max[-B + A' - A^2] < \frac{\pi^2}{b^2}$, so muß eine Lösung y von $y'' - 2Ay' - By = 0$, $y(0) = y(b) = 0$, notwendigerweise identisch verschwinden. *G. Cimmino* (Napoli).

Rosenblatt, Alfred: Sur les théorèmes de M. Picard dans la théorie des problèmes aux limites des équations différentielles ordinaires non linéaires. Bull. Sci. math., II. s. 57, 100—106 (1933).

Bei der Methode der sukzessiven Approximationen für die Gleichung

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B,$$

ersetzt Verf. die Lipschitzsche Bedingung durch die folgende

$$|f(x, y, z) - f(x, y', z')| \leq \frac{\alpha |y - y'|}{x^{1+m} (b-x)^{1+m}} + \frac{\beta |z - z'|}{x^m (b-x)^m},$$

wobei $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < m < 1$; er findet alsdann, daß die Ungleichung

$$\frac{\alpha + 2^m \beta b}{(1-m)b^{2m}} < 1$$

die Konvergenz der Approximationen sichert. Es folgt die nicht neue Bemerkung, daß die gesuchte Lösung y , falls $f'_y \geq 0$, eindeutig bestimmt wird. *G. Cimmino.*

Rosenblatt, A.: Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre non linéaires du type elliptique. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 443—448 (1933).

Es handelt sich um eine Ausdehnung der Untersuchungen des Verf. über gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung (siehe das vorangehende Referat) auf die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}).$$

Die Lipschitzsche Bedingung wird durch eine weniger einschränkende Bedingung ersetzt; die Ungleichungen, die hinreichend gefunden werden, damit die sukzessiven Approximationen konvergieren, enthalten die obere und die untere Grenze des absoluten Betrages der Ableitung der komplexen Funktion, die das vorgegebene Gebiet auf einen Kreis konform abbildet. *G. Cimmino* (Napoli).

Mammana, G.: Sulla commutabilità dei fattori di composizione di una forma differenziale (lemma fondamentale). Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 2, 65—67 (1932).

Beweis des folgenden Satzes: Sind in der Zerlegung eines linearen Differentialoperators

$$\sum_{i=0}^n p_i \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} = \left(\frac{d}{dx} + \eta_1\right) \left(\frac{d}{dx} + \eta_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} + \eta_n\right)$$

die beiden Faktoren $\frac{d}{dx} + \eta_r$, $\frac{d}{dx} + \eta_s$ nicht identisch und vertauschbar ($r < s$), so sind alle Faktoren $\frac{d}{dx} + \eta_i$ mit $r \leq i \leq s$ untereinander vertauschbar. *G. Cimmino.*

Gallina, Gallo: Su una classe di equazioni differenziali lineari omogenee del 3° ordine. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 142—145 (1933).

Si determinano condizioni necessarie e sufficienti affinché un'equazione lineare omogenea del 3° ordine ammetta un sistema fondamentale di integrali della forma u^2 , uv , v^2 , e si fa vedere come si possa costruire razionalmente, coi coefficienti del-

l'equazione del 3° ordine, un'equazione lineare omogenea del 2° ordine avente per integrali le funzioni u e v . Autoreferat.

Pfeiffer, G.: Über die allgemeinen Integrale von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion und von Systemen solcher Gleichungen, die Integrale im Sinne von S. Lie zulassen. Math. Z. 36, 790—805 (1933).

Erster Teil. Wenn die Relation $\Phi\{\varphi_1(z, x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_h), \varphi_2, \dots, \varphi_{q+1}\} = 0$ ($\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}$ unabhängige Funktionen, c_1, \dots, c_h willkürliche Konstanten, Φ willkürliche Funktion) ein allgemeines Integral eines Systems $f_i\left(z, x_1, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots\right) = 0$ ($i = 1, \dots, m$) ist, so zeigt der Verf., daß die Ausdrücke

$$\frac{D\left(\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_k}}{\partial c_k}\right)}{D(z, x_1, \dots, x_q, x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_k})}$$

nicht alle gleich Null sein können für $k = 1$, für $k = 2, \dots$, für $k = h$ ($\lambda_1 \dots \lambda_k$ ist eine Kombination der Zahlen $1, \dots, q + 1$ zu je k mit Wiederholung, τ_1, \dots, τ_k eine Kombination aus den Zahlen $q + 1, \dots, n$). Es werden die Determinanten der obigen Art eingehender studiert. — Der zweite Teil ist der dies. Zbl. 3, 210 referierten Abhandlung des Verf. parallel. Janczewski (Leningrad).

Russyan, C.: Cas remarquable du système en involution de n équations aux dérivées partielles de l'ordre n d'une fonction inconnue à deux variables indépendantes. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 1, 45—80 (1932).

The author extends results previously published (see this Zbl. 6, 202) on the integration of the equation,

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{01}, p_{10}, \dots, p_{0n}), \quad p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}. \quad (1)$$

Let us call the integrals of the associated set of Pfaffian equations, $u_i(x, y, z, p_{01}, p_{10}, \dots, p_{0n}) = c_i$, $i = 1 \dots N$, $N = \frac{1}{2}n(n+1) + n$. From this array there is sought a set, u_1, \dots, u_n , in terms of which the remaining $N - n$ integrals may be expressed. The problem proposed is to determine u_n when u_1, u_2, \dots, u_{n-1} are known, discussion being centered upon the case where several distinct, complete integrals of (1) satisfy also the system,

$$u_i = c_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

The system consisting of (1) and (2) is said to be in involution. Basic to the discussion is the determination of the roots of the equation:

$$\lambda^n + \lambda^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-1,1}} - \lambda^{n-2} \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-2,2}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{0n}} = 0.$$

If the roots, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, are unequal and if (1) has corresponding invariants, v_1, \dots, v_{n-1} , containing the variables $p_{n-1,1} \dots p_{0n}$, then these may be taken as the functions u_1, \dots, u_{n-1} , and the system consisting of (1) and (2) is in involution of rank one. If the roots $\lambda, \dots, \lambda_n$ are unequal and if (1) has n invariants corresponding to them, then equation (1) has a unique integral which, satisfies the system, $u_i = c_i$, $i = 1, \dots, n$. The paper is generalized to include conditions under which the system of functions, u_1, \dots, u_{m+i-1} , $i = 1, \dots, n - m - 1$, determines the following function, u_{m+i} . The paper concludes with an example in which the theory is applied to the equation: $p_{30} = p_{21}$. H. T. Davis (Bloomington, Indiana).

Botea, N.: Sur une classe d'équations aux dérivées partielles. Bul. fac. şti. Cernăuţi 6, 266—270 (1933).

Es sei

$$E(U) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{\kappa=1}^n a_{i\kappa} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \right) U,$$

$$G(U) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{\kappa=1}^n b_{i\kappa} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \right) U.$$

Setzt man $u_i = \sum_{\kappa=1}^n A_{i\kappa} x_\kappa$, wobei $A_{i\kappa}$ die Minoren der Matrix $(a_{i\kappa})$ sind, und bildet mit Hilfe von n differenzierbaren Funktionen $f_1(t), \dots, f_n(t)$ die Funktionen

$$\xi_i = c \sum_{\kappa=1}^n b_{i\kappa} f_\kappa(u_\kappa), \quad (i = 1, \dots, n)$$

so gilt, wie der Verf. in der Note beweist, der Satz: Ist U ein Integral der Gleichung $E(U) = 0$, so ist die Funktion

$$v(x_1, \dots, x_n) = U(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

ein Integral der Gleichung $G(U) = 0$. Dieser Satz enthält z. B. als Spezialfall die Tatsache, daß mit $U(x, y)$ auch $U\left(\frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{k^2 y}{x^2 + y^2}\right)$ eine Lösung der Gleichung $\Delta U = 0$ ist. *Lüneburg* (Göttingen).

Devisme, J.: Sur certains opérateurs décomposables en produit de Laplaciens et de dérivées partielles et sur quelques identités qui leurs sont relatives. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei 86, 95–108 (1933).

Es werden verschiedene Typen von mit dem Laplaceschen Differentialausdruck verbundene partielle Differentialgleichungen untersucht. Es sei

$$A_{r+2, n} U = \frac{\partial^r}{\partial u_1 \dots \partial u_r} \left[\sum_{i=1}^{n-r} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \right],$$

$$\Delta \alpha_1 \dots \alpha_n U = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} \left\{ \sum_{j=1}^{\alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial v_j^2} \left[\dots \left(\sum_{s=1}^{\alpha_n} \frac{\partial^2 U}{\partial t_s^2} \right) \right] \right\}$$

und Δ^* der entsprechende κ -fach iterierte Differentialausdruck. Der Verf. konstruiert sodann u. a. Lösungen der Differentialgleichungen

$$A_{r+2, n}^* U = 0, \quad A_{r+2, n}^* U = \lambda U \quad \text{bzw.} \quad \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^* U = 0, \quad \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^* U = \lambda U,$$

die nur von dem Ausdruck

$$p_{r+2, n} = u_1 \dots u_r \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 \quad \text{bzw.} \quad p_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} u_i^2 \cdot \sum_{j=1}^{\alpha_2} v_j^2 \dots \sum_{s=1}^{\alpha_n} t_s^2$$

abhängen.

Lüneburg (Göttingen).

Ghermanesco, M.: Sur une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre. Bul. fac. şti. Cernăuţi 6, 28–35 (1933).

Eine Untersuchung der Differentialgleichung

$$\Delta_4 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} - 2 \sum \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + 8 \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y \partial z \partial t} = 0,$$

die durch eine einfache Transformation übergeht in $\frac{\partial^4 U}{\partial u \partial v \partial w \partial s} = 0$. Ist

$$p = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 2 \sum x^2 y^2 + 8 x y z t,$$

so wird die Gleichung gelöst durch $\log p$ und, bei beliebigem h , durch $\log(p + h)$.

Durch die Entwicklung $\log(p + h) = \sum_0^\infty h^n R_n(x, y, z, t)$ erhält man weitere Lösungen R_n ,

die sich auf der Kurve $p = 1, p_x = 0, p_{xx} = 0$ auf gewisse Polynome $P_n(x)$ reduzieren. Neben dieser Differentialgleichung 4. Ordnung wird ein lineares System von 4 partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Funktionen U, V, W, P betrachtet, welches die Eigenschaft hat, das bei der Transformation $u = U(x, y, z, t), \dots$ die Differentialausdrücke

$$\begin{aligned} d s^4 &= \sum d x^4 - 2 \sum d x^2 d y^2 + 8 d x d y d z d t, \\ d S^4 &= \sum d u^4 - 2 \sum d u^2 d v^2 + 8 d u d v d w d p \end{aligned}$$

in der Beziehung stehen:

$$d S^4 = \lambda d s^4.$$

Die Funktionen U, V, W, P genügen auch der obigen Differentialgleichung 4. Ordnung,

so daß eine gewisse Verallgemeinerung der bei der Potentialgleichung in 2 Dimensionen bestehenden Verhältnisse hinsichtlich der konformen Abbildung gewonnen ist.

Lüneburg (Göttingen).

● **Hopf, Ludwig:** Einführung in die Differentialgleichungen der Physik. (Sammlung Göschel. Bd. 1070.) Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1933. 138 S. u. 49 Abb. geb. RM. 1.62.

Dix, C. Hewitt: Lattice regions and their application in dynamics. Tôhoku Math. J. 36, 324—345 (1933).

In Parallele zu den Differentialgleichungen der Physik kann man die entsprechenden Differenzgleichungen betrachten; jenen Problemen stehen alsdann gewisse algebraische Probleme gegenüber (vgl. Courant, Friedrichs, Lewy, Partielle Differenzgleichungen der Physik, Math. Ann. 100). — Der Verf. stellt in der vorliegenden Arbeit eine Anzahl von Eigenschaften solcher Differenzgleichungen, die in genauer Analogie zu den entsprechenden Eigenschaften der Differentialgleichungen stehen, zusammen, insbesondere solche, die mit Variationsproblemen verbunden sind. Das zugrundegelegte Gitter ist dabei, allgemeiner als in der zitierten Arbeit nicht notwendig als geradlinig sondern als entstanden aus irgendwelchen krummlinigen Koordinatenlinien vorausgesetzt. Sodann wird eine Anwendung der erhaltenen Formeln auf gewisse Probleme der Dynamik entwickelt.

Lüneburg (Göttingen).

Doetsch, Gustav: Das Eulersche Prinzip. Randwertprobleme der Wärmeleitungstheorie und physikalische Deutung der Integralgleichung der Thetafunktion. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 325—342 (1933).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die von Hadamard aufgeworfene Frage nach der wärmetheoretischen Bedeutung der Bernsteinschen Integralgleichung für die Theta-nullfunktion

$$\vartheta_3(0, t) * (\vartheta_3(0, t) + 1) - (2t \vartheta_3(0, t) + 1) = 0 \quad (1)$$

(wobei allgemein

$$\int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau = F_1 * F_2$$

gesetzt) zu beantworten. Zu diesem Zweck bestimmt Verf. eine Lösung $\Phi(x, t)$ der linearen Wärmeleitungsgleichung, die den Randbedingungen

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x, t) = 2t \vartheta_3(0, t) + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

genügt und weist von ihr nach, daß sie auch den Randbedingungen

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\vartheta_3(0, t) - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

genügt. Als Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die den zweitgenannten Randbedingungen genügt, läßt sich nun Φ in einer anderen Form schreiben. Gleichsetzung der beiden Formen liefert dann die Relation

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right) * (\vartheta_3(0, t) + 1) + \frac{\partial \vartheta_2\left(\frac{x}{2}, t\right)}{\partial x} * (2t \vartheta_3(0, t) + 1) = 0, \quad (0 < x < 1)$$

die für $x \rightarrow 0$ in die Relation (1) übergeht. — Vorher behandelt Verf. noch den einfacheren Fall eines einseitig nicht begrenzten Wärmeleiters und erhält in analoger

Weise eine Integralgleichung für die Funktion $e^{-\frac{x^2}{4t}}/\sqrt{\pi t}$, welche für $x = 0$ auch eine Lösung von (1) ist. — Das hier benutzte Prinzip, Relationen dadurch zu gewinnen, daß man die Lösung einer partiellen Differentialgleichung als Lösung zweier Randwertaufgaben auffaßt, bezeichnet Verf. als Eulersches Prinzip, um die Analogie mit dem Eulerschen Verfahren zum Beweis des Additionstheorems für das elliptische Normalintegral 1. Gattung, welches auf dem Gleichsetzen zweier in verschiedener Form auftretender allgemeiner Integrale einer gewöhnlichen Differentialgleichung beruht, hervortreten zu lassen. — Die Methode zur Behandlung der auftretenden Wärmeleitungsaufgaben ist die der Laplacetransformation.

E. Rothe (Breslau).

Gerschgorin, S.: Über einen allgemeinen Mittelwertsatz der mathematischen Physik. C. R. Acad. Sci. URSS A Nr 2, 50—53 (1932).

Es sei $f(x_1, \dots, x_p)$ nebst ihren p ersten Laplaceschen Iterierten $\Delta^* f$ in einem Gebiet des n dimensionalen Raumes stetig. Der Verf. gibt eine Ableitung der Formel:

$$\frac{1}{O_n} \int_{S_n^r} f d\sigma_n = \sum_{\alpha=0}^{p-1} \Phi_n^\alpha(r) \Delta^* f(P) + \Phi_n^p(r) \Delta_n^p(x'_1, \dots, x'_n),$$

die den Mittelwert der Funktion f auf einer in D gelegenen Kugelfläche S_n^r vom Radius r durch die Werte $\Delta^* f(P)$ im Mittelpunkt der Kugel ausdrückt. *Lüneburg.*

Meixner, J.: Die Greensche Funktion des wellenmechanischen Keplerproblems. Math. Z. 36, 677—707 (1933).

Es wird die Greensche Funktion der allgemeinen Schrödingerschen Wellengleichung betrachtet, wobei der Parameter kein Eigenwert sein darf. Da das Spektrum alle reellen Werte umfassen kann, wird dabei der Parameter als komplexe Zahl angesehen. Es wird die Entwicklung der Greenschen Funktion nach den Eigenfunktionen angegeben (ohne Konvergenzbeweis) und der Grenzübergang des Parameterwertes gegen einen Eigenwert betrachtet. Durchgeführt wird die Rechnung im Falle des ein- und des dreidimensionalen Keplerproblems, für das man die Eigenfunktionen durch entartete hypergeometrische Funktionen darstellen kann. Schließlich werden noch für die letztgenannten Funktionen $\left[F(\alpha, \gamma, x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{\beta}\right) \right]$ Integraldarstellungen, asymptotische Entwicklungen, Rekursionsformeln und Additionstheoreme angegeben.

Willy Feller (Kiel).

Niklibore, Wladysław: Über die Niveaueurven logarithmischer Flächenpotentiale. Math. Z. 36, 641—646 (1933).

Es sei T die Gesamtheit von endlich vielen beschränkten Gebieten der Ebene, $f(M)$ in T nicht negativ und integrierbar,

$$V(P) = - \int_T f(M) \log r_{PM} d\sigma_M$$

das logarithmische Flächenpotential von T bezüglich der Belegung f . Es wird bewiesen: Eine Niveaueurve $V(P) = c$ ist jedenfalls dann konvex, wenn von jedem ihrer Punkte aus die Menge T unter einem Winkel $< \frac{\pi}{4}$ erscheint. Für genügend kleine c ist diese Voraussetzung stets erfüllt. *W. Fenchel (Göttingen).*

Misra, Rama Dhar: On the potential of bodies having densities with discontinuities of the second kind. Proc. Benares Math. Soc. 13, 29—39 (1931).

Es sei V ein Newtonsches Potential mit einer Belegungsfunktion, die in Polarkoordinaten die Gestalt $\cos f(r, \varphi, \psi)$ hat, wobei f ein Produkt von Funktionen je einer der Veränderlichen ist. Es werden hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß $\partial^2 V / \partial x^2$ im Nullpunkt existiert, auch wenn f dort unstetig wird. *Willy Feller.*

Ghermanesco, M.: Sur l'équation de Bessel. Bull. sci. École polytechn. Timișoara 4, 151—158 (1932).

Die Besselsche Funktion

$$J(\gamma, x) = \Gamma(\gamma) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m! \Gamma(m + \gamma)}$$

genügt der Differentialgleichung $B(y) = y$, wobei $B(y) = x y'' + \gamma y$ ist. Es sei $B_n(y)$ die n -te Iterierte von B ; der Verf. betrachtet die allgemeinere Differentialgleichung

$$B_n(y) + \lambda_1 B_{n-1}(y) + \dots + \lambda_n y = 0.$$

U. a. wird die allgemeine Lösung dieser Gleichung konstruiert, und zwar ist z. B. für nicht ganzzahlige λ und für den Fall, daß alle Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ der Gleichung

$$\alpha^n + \lambda_1 \alpha^{n-1} + \dots + \lambda_n = 0$$

verschieden sind:

$$u = \sum_{i=1}^n [C_i J(\gamma, \alpha_i x) + D_i (\alpha_i x)^{1-\gamma} J(2-\gamma, \alpha_i x)].$$

Die betrachtete Differentialgleichung tritt bei dem Problem auf, Grundlösungen der metaharmonischen Differentialgleichung

$$\Delta^{(n)} u + \lambda_1 \Delta^{(n-1)} u + \dots + \lambda_n u = 0$$

zu bestimmen.

Lüneburg (Göttingen).

Devisme, Jacques: Sur deux questions relatives à l'équation de M. P. Humbert. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1203—1204 (1933).

Robert, Jean-Pierre: Sur les formules généralisées de médiation et les équations intégrales singulières correspondantes. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 24, 129 bis 190 (1932).

Die Arbeit enthält eine ausführliche, zusammenfassende Darstellung von Resultaten über n -metaharmonische Funktionen, d. h. Funktionen $u(x_1, \dots, x_p)$ im p -dimensionalen Raum, die einer Gleichung

$$\mathfrak{D}^{(n)} u = \Delta^{(n)} u + \lambda_1 \Delta^{(n-1)} u + \dots + \lambda_{n-1} \Delta u + \lambda_n u = 0$$

genügen, wobei die λ , Konstante sind. Speziell enthält sie auch die entsprechenden Resultate über n -harmonische Funktionen, die der Gleichung $\Delta^{(n)} u = 0$ genügen, und insbesondere über harmonische Funktionen; die Resultate bieten damit eine direkte Verallgemeinerung klassischer Sätze über die Potentialgleichung. In den ersten Kapiteln entwickelt der Verf. Formeln für die Mittelwerte

$$\frac{1}{S_\varrho} \int_{S_\varrho} u(m) d\sigma_m \quad \text{und} \quad \frac{1}{V_\varrho} \int_{\Omega_\varrho} u(P) d\omega_P$$

einer Funktion $u(x_1, \dots, x_p)$, gebildet über die Oberfläche S_ϱ bzw. das Innere Ω_ϱ einer p -dimensionalen Kugel vom Radius ϱ ; S_ϱ ist die Oberfläche, V_ϱ das Volumen dieser Kugel. Besitzt $u(P)$ in jedem Punkte eines Gebietes D eine stetige n -te Laplacesche Iterierte $\mathfrak{D}^{(n)} u$, ist S_ϱ die Kugel vom Radius ϱ um einen Punkt M_0 , deren Inneres ganz in D liegt, so ergibt sich die Formel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_\varrho} \int_{S_\varrho} u(m) d\sigma_m &= \Phi_n^1(\varrho) u(M_0) + \Phi_n^2(\varrho) \Delta u(M_0) + \dots \\ &+ \Phi_n^p(\varrho) \Delta^{(n-1)} u(M_0) + \frac{1}{(p-2) S_\varrho} \int_{\Omega_\varrho} G_n^p(P) \mathfrak{D}^{(n)} u(P) d\omega_P. \end{aligned}$$

Dabei sind die Funktionen $\Phi_n^p(\varrho)$ und $G_n^p(\varrho)$ durch den Differentialausdruck $\mathfrak{D}^{(n)} u$ wohlbestimmte Funktionen. Ist $\mathfrak{D}^{(n)} u = 0$, so ergibt sich für n -metaharmonische Funktionen ein Mittelwertsatz, der den bekannten Mittelwertsatz für Potentialfunktionen verallgemeinert. In einem weiteren Kapitel wird umgekehrt gezeigt, daß, wenn eine summable, beschränkte Funktion $u(P)$ in jedem Punkte M_0 eines Gebietes D und für jede Kugel S_ϱ um M_0 , die noch ganz in D liegt, die Relation

$$\frac{1}{S_\varrho} \int_{S_\varrho} u(m) d\sigma_m = \Phi_n^1(\varrho) u(M_0) + \Phi_n^2(\varrho) V_1(M_0) + \dots + \Phi_n^n(\varrho) V_{n-1}(M_0)$$

erfüllt — $V_i(M_0)$ seien in D beschränkte Funktionen —, die Funktion n -metaharmonisch ist und dabei $V_i(M_0) = \Delta^i(M_0)$ gilt. — Im letzten Kapitel betrachtet der Verf. im Anschluß an Lebesgue singuläre Integralgleichungen (für 2 Dimensionen geschrieben)

$$\frac{1}{2\pi\varrho^2} \iint_{C_\varrho} u(m) d\omega_m = u(P) + \varrho^2 V(P),$$

wobei C_ϱ jeweils der größte Kreis um P ist, der noch in D liegt und löst mit ihrer Hilfe und mit Hilfe der vorher erhaltenen Mittelwertsätze das verallgemeinerte Problem von Riquier: Eine Lösung der Gleichung $\mathfrak{D}^{(n)} u = \varphi(P)$ zu bestimmen, die auf dem Rande von D nebst ihren $n-1$ ersten Laplaceschen Iterierten vorgeschriebene Werte annimmt. $\varphi(P)$ wird dabei als stetig und mit stetigen ersten Ableitungen versehen, vorausgesetzt. Es ergibt sich eine Verallgemeinerung früherer Resultate für den Fall, daß $\varphi(P)$ nur als stetig vorausgesetzt wird, und zwar ergibt sich dasselbe Resultat, nur daß jetzt für Δu der verallgemeinerte Laplace'sche Ausdruck

$$\Delta u = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{2p}{\varrho^2 S_\varrho} \int_{S_\varrho} [u(m) - u(M_0)] d\sigma_m$$

zu verwenden ist.

Lüneburg (Göttingen).

Spezielle Funktionen:

Natanson, I.: Note sur le développement des fonctions suivant les polynômes orthogonaux. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 1, 85—88 (1933) [Russisch].

Let $\omega_n(x) (n = 0, 1, \dots)$ denote a sequence of orthogonal and normal polynomials corresponding to the finite (a condition not explicitly stated. Ref.) interval (a, b) , with the characteristic function $p(x)$, positive and L -integrable on (a, b) . The author proves the following theorem. If $f(x)$ satisfies, for $a \leq x \leq b$, Lipschitz condition of order $\alpha > \frac{1}{2}$, then the expansion

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad \left(c_n = \int_a^b p(x) f(x) \omega_n(x) dx \right) \quad (1)$$

converges to $f(x)$ almost everywhere on (a, b) . The proof uses the well known property of the sequence

$$\left\{ \sum_{i=0}^n c_i \sqrt{p(x)} \varphi_i(x) \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

to converge in the average (mittlere Konvergenz) to $\sqrt{p(x)} f(x)$ on (a, b) , and the well known property of Lebesgue integrals (the author's Lemma is unnecessary. Ref.):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 0 \quad \text{implies} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$$

almost everywhere in (a, b) [$\varphi_n(x)$ — of class L^2 in (a, b)]. [We must add, considering the orthogonal set

$$\{\sqrt{p(x)} \omega_n(x)\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

that the results of the Note under consideration are not new. In fact, they follow from those of H. Rademacher [Math. Ann. 87, 112—138 (1922)], for here the series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \log^2 n$

converges. Cf. also, Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik 1, 96—97 (1924). Ref.].

J. Shohat (Philadelphia).

Shohat, J., et H. Bushey: Sur certains développements en séries des polynômes orthogonaux de Tchebycheff. Mathematica 7, 38—50 (1933).

Soit donnée une suite $\varphi_n(x)$ de polynômes orthogonaux de Tchebycheff correspondant à l'intervalle (a, b) et à la fonction caractéristique $p(x) \geq 0$ dans (a, b) . Les auteurs considèrent d'abord le développement fini

$$x^n = \sum_{i=0}^n I_{n,i} \varphi_i(x), \quad \text{où} \quad I_{n,i} = \int_a^b p(x) x^n \varphi_i(x) dx$$

et donnent des conditions suffisantes pour que tous les coefficients $I_{n,i}$ soient de même aigue ou de signes alternés: le premier cas se présente, lorsque $0 \leq a < b$, ou bien si $p(x) = p(-x)$ et $a = -b$; le second cas a lieu pour $a < b \leq 0$. En appliquant ceci à l'étude de la convergence des développements en séries de polynômes correspondents, les auteurs obtiennent, que le développement d'une fonction $f(x)$ bornée et continue

au voisinage de $x = b$, dont tous les coefficients $A_i = \int_a^b p(x) \varphi_i(x) f(x) dx$ sont de

même signe, converge absolument pour $x = b$, si $p(x) = (x - a)^{\alpha-1} (b - x)^{\beta-1} q(x)$, où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q(x) > 0$. En passant ensuite au cas particulier de Jacobi, où $q(x) = 1$, et en supposant $\alpha \geq \frac{1}{2}$, $\beta \geq \frac{1}{2}$, on démontre le convergence absolue du développement de $f(x)$ en tous ses points de continuité, pourvu que $f(x)$ soit bornée et continue au voisinage $x = b$ et que les coefficients A_i soient de même signe à partir de $i > i_0$ et d'autres propositions analogues.

S. Bernstein (Charkow).

Koschmieder, Lothar: Über die Konvergenz der Laplaceschen Reihe auf der Überkugel und gewisser Hermitescher Reihen. Mh. Math. Phys. 40, 223—232 (1933).

Nachdem der Verf. kürzlich [Math. Ann. 104, 387ff. (1931); dies. Zbl. 1, 60] die C -Summierbarkeit der in Rede stehenden Überkugulentwicklungen untersucht hat,

wendet er sich jetzt der Konvergenzfrage zu. Er erhält durch direkte Übertragung der von A. Kneser im Falle der gewöhnlichen Laplaceschen Reihe verwendeten Methode der quellenmäßigen Darstellung die absolute Konvergenz der Entwicklung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion, wobei noch die Stetigkeit der sog. Ergiebigkeit vorauszusetzen ist. Der Beweis wird für die dreistufige Überkugel durchgeführt. Das Orthogonalsystem läßt sich in diesem Falle durch die Tschebyscheffschen Polynome $\frac{\sin(k+1)\gamma}{\sin \gamma}$ darstellen.

G. Szegő (Königsberg, Pr.).

Shabde, N. G.: On certain expansions of zero in series of associated Legendre functions, $P_n^m(\mu)$. Proc. Benares Math. Soc. 13, 19–28 (1931).

Der Verf. gibt zahlreiche Entwicklungen der Zahl Null in einer Reihe von Legendreschen Funktionen höherer Ordnung $P_n^m(\mu)$ (m und n sind ganze Zahlen, $\mu = \cos \theta$). Es werden dazu zwei Methoden benutzt. — I. Eine Methode analog der Lindemannschen Methode zur Entwicklung der Zahl Null in einer Reihe von Laméschen Funktionen.

Es wird angenommen, daß die gesuchte Entwicklung der Form $\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n A_p^q P_p^q(\mu)$ ist.

Die Funktionen $P_p^q(\mu)$ werden nach Potenzen von μ entwickelt, und die resultierenden Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von μ gleich Null gesetzt. Die Koeffizienten A_p^q werden aus den gefundenen Gleichungen berechnet. — II. Die bekannte Methode der Entwicklung eines Polynoms in $\cos \theta$, $\sin \theta \cos \varphi$ und $\sin \theta \sin \varphi$ in eine Reihe von $P_n^m(\cos \theta)$. Nachher wird $\varphi = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$ gesetzt. — Ein Beispiel der Ergebnisse der ersten Methode ist:

$$0 = -2P_0^0(\mu) + 2P_2^0(\mu) + P_2^2(\mu),$$

und eins der zweiten Methode:

$$0 = -P_0^0(\mu) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k+1)(2k-2)!}{(2k+2)!} P_{2k}^2(\mu).$$

Der Verf. bemerkt, daß eine solche Entwicklung in eine Reihe nach $P_n(\mu)$ nicht möglich sei für ganze Werte von n , doch vielleicht möglich sei, wenn n nicht ganz sei. van Veen.

Shabde, N. G.: On the value of $\int_{-1}^{+1} Q_m(\mu) Q_n(\mu) d\mu$. Proc. Benares Math. Soc. 13, 41–44 (1931).

J. W. Nicholson hat gemeint, beweisen zu können, daß die Legendreschen Funktionen zweiter Art $Q_m(\mu)$ ein orthogonales Funktionensystem bilden, also daß:

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(\mu) \cdot Q_n(\mu) d\mu = 0 \text{ für } m \neq n, (m \text{ und } n \text{ ganz}) \quad (1)$$

[Philos. Mag. (6) 43, 1–29 (1922)]. — Ganesh Prasad dagegen hat gezeigt, daß (1) dann und nur dann gilt, wenn $m - n \equiv 1 \pmod{2}$ ist [Proc. Benares Math. Soc. 12, 39 (1930)]. Um die Abweichung dieser beiden Ergebnisse zu erklären, hat der Verf. den Beweis von Nicholson kritisch untersucht. $Q_m(\mu)$ wird definiert wie folgt:

$$Q_m(\mu) = \frac{1}{2} P_m(\mu) \log \frac{1+\mu}{1-\mu} - \sum_{r=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} a_r P_{m-2r-1}(\mu), \quad |\mu| < 1. \quad (2)$$

[Die Größen a_r sind Zahlenkoeffizienten, die nach Christoffel, J. f. reine angew. Math. 55 gleich $\frac{2m-4r-1}{(2r+1)(m-r)}$ sind. (Ref.).]

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(\mu) Q_n(\mu) d\mu = \frac{1}{(m-n)(m+n+1)} [(1-\mu^2) Q_m(\mu) Q_n'(\mu) - Q_n(\mu) Q_m'(\mu)]_{-1}^{+1}. \quad (3)$$

Der Verf. zeigt, daß Nicholson bei Berechnung des Ausdruckes (3) mittels (2) mehrere Glieder ausgelassen hat. Er findet schließlich

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(\mu) Q_n(\mu) d\mu = \left[P_m(\mu) \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_s P_{n-2s-1}(\mu) - P_n(\mu) \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} a_r P_{m-2r-1}(\mu) \right]_{-1}^{+1}.$$

Für $m \equiv n \pmod{2}$ sind beide Glieder ungerade Polynome in μ , und der Verf. behauptet, daß also ihre Differenz an der oberen und unteren Grenze nicht verschwinden könne. Diese Behauptung ist nur dann wahr, wenn zuerst gezeigt wird, daß

$$[P_m(\mu) \sum a_s P_{n-2s-1}(\mu) - P_n(\mu) \sum a_r P_{m-2r-1}(\mu)]_{-1}^{+1} \neq 0$$

ist, und dieser Beweis wird vom Verf. nicht gegeben. Dennoch ist die Behauptung wahr, denn man kann mittels der oben zitierten Zahlenwerte der Koeffizienten a_r und wegen $P_m(1) = 1$, $P_m(-1) = (-1)^m$ zeigen, daß

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(\mu) Q_n(\mu) d\mu = \{1 + (-1)^{m+n}\} \left[\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_s - \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} a_r \right] = 2 \cos^2(m+n) \frac{\pi}{2} \sum_{r=m+1}^n \frac{1}{r}$$

für $n > m$, womit die Richtigkeit des Prasadschen Ergebnisses vollständig gezeigt worden ist. S. C. van Veen (Dordrecht).

● **Prasad, Ganesh: A treatise on spherical harmonics and the functions of Bessel and Lamé. Pt. 1. (Elementary.)** Leipzig: K. F. Koehlers Antiquarium 1930. XII, 159 S. geb. RM. 8.—.

● **Prasad, Ganesh: A treatise on spherical harmonics and the functions of Bessel and Lamé. Pt. 2. (Advanced.)** Leipzig: K. F. Koehlers Antiquarium 1932. XIII, 249 S. geb. RM. 17.—.

Verf. unternimmt ein modernes Gegenstück zu Heines Kugelfunktionen zu schaffen, indem er die Haupteigenschaften der Kugelfunktionen, ferner der Besselschen und Laméschen Funktionen, wenn auch in einer wesentlich knapperen Form, wie es bei Heine geschieht, entwickelt. Er nimmt dabei auch auf neuere Ergebnisse Rücksicht, z. B. wird die Summabilitätstheorie bei Legendreschen und Laplaceschen Reihen gestreift. Einige Formulierungen sind nicht stichhaltig. Um nur zwei Beispiele zu nennen: 1. Auf Bd. 1, 53 steht „ $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n} \sin \theta P_n(\cos \theta)\}$ ist endlich“, obwohl dieser Grenzwert bekanntlich gar nicht existiert. 2. Die Hilbsche Formel auf S. 55 ist nur für $0 < \theta \leq \pi - \varepsilon$ gültig. — Was die Theorie der Kugelfunktionen und der Laméschen Funktionen anbetrifft, so ist sie inzwischen auf breiter Basis in dem Werke von Hobson (Cambridge 1931; dies. Zbl. 4, 210) behandelt worden. Szegő (Königsberg, Pr.).

Ascoli, Guido: Funzioni antiarmoniche in un campo circolare. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 255–268 (1933).

The author considers the functional space L of real functions defined and summable over the open circle $|z| < R$. A measurable bounded function is said to be antiharmonic if it is orthogonal to all harmonic functions in L . There are defined in L two orthogonal normal sets: a set A of harmonic functions and a set A' of antiharmonic ones such that $A + A'$ is an orthogonal normal and complete set in L . The existence of such sets may easily be established on the basis of general theorems and this has essentially been done in a previous paper by the author. In this paper the sets A and A' are defined explicitly as systems of functions given by simple formulas: namely A is the set of the real and imaginary parts of functions $\sqrt{\frac{2(m+1)}{\pi}} \frac{z^m}{R^{m+1}}$ where $m = 0, 1, \dots$ and A' that of functions

$$\sqrt{\frac{n+2}{2\pi}} \frac{n+1}{R} F\left(-n, n+2, 2, \frac{|z|}{R}\right),$$

$$\sqrt{\frac{2m+n+2}{\pi}} \binom{2m+n+1}{n} \frac{z^m}{R^{m+1}} F\left(-n, 2m+n+2, 2m+2, \frac{|z|}{R}\right),$$

where $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$ and $F\left(-n, 2m+n+2, 2m+2, \frac{|z|}{R}\right)$ denote hypergeometric polynomials.

Saks (Warszawa).

Egan, M. F.: On Stirling's theorem as a definition of the Gamma function. *Math. Gaz.* **17**, 114—121 (1933).

Bezeichnet man mit Δx den Inhalt des Segments, das von der zwischen den Punkten x und $x+1$ der Kurve $\log x$ laufenden Sehne und dem zugehörigen Kurvenbogen begrenzt wird, und mit $\Phi(x)$ die konvergente Reihe

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta(x+\nu); \quad x > 0,$$

so gilt

$$\log \Gamma(x) = (x - \tfrac{1}{2}) \log x - x + c + \Phi(x).$$

Von dieser Definition der Γ -Funktion ausgehend entwickelt der Verf. in der vorliegenden Note die Haupteigenschaften dieser Funktion. *Lüneburg* (Göttingen).

Jung, Heinrich W. E.: Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen. C. Über die Defekte von Klassen. *J. reine angew. Math.* **168**, 131—169 (1932).

Dieser dritte Teil der Arbeit des Verf. handelt von den Defekten der Divisorenklassen (vgl. dies. Zbl. **2**, 119 u. **3**, 197), dem arithmetischen Geschlecht p_a und dem Riemann-Rochschen Satz. Die wichtigsten Sätze über p_a sind: Der Riemann-Rochsche Satz $[\Omega] \geq p_a + 1$ für alle Klassen Ω des Körpers. Ferner: Bezeichnet π die Anzahl der linear unabhängigen totalen Differentiale erster Gattung, so ist $p_a + \pi = p_g$, gleich dem geometrischen Geschlecht, das ist die Dimension der Differentialklasse oder die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung. *Deuring*.

Jung, Heinrich W. E.: Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen. D. Doppelintegrale zweiter Gattung. *J. reine angew. Math.* **169**, 43—60 (1932).

Neuer Beweis für die Picardschen Sätze über die Doppelintegrale zweiter Gattung eines Körpers K von zwei Veränderlichen. Es zeigt sich, daß die Integranden zweiter Gattung ausgedrückt werden können durch eine Basis der einfachen Integranden zweiter Gattung nach $x, -y$ als Parameter aufgefaßt. Daher kann die gesuchte Anzahl linear unabhängiger Doppelintegrale zweiter Gattung durch ein Reduktionsverfahren auf das Geschlecht von K als Funktionenkörper von x zurückgeführt werden. Im Zusammenhang hiermit werden Sätze über Integrale dritter Gattung bewiesen.

Deuring (New Haven).

Haviland, E. K.: On statistical methods in the theory of almost-periodic functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **19**, 549—555 (1933).

Das Ziel der Arbeit ist zu zeigen, daß jede komplexwertige, fastperiodische Funktion einer reellen Variablen eine Verteilungsfunktion besitzt. Der Fall reellwertiger Funktionen wurde von Wintner behandelt; Verf. verallgemeinert eine der Methoden von Wintner [*Math. Z.* **36**, 618—629 (1933); dies. Zbl. **6**, 162]. Das Schlußergebnis ist: Ist $z(t) = x(t) + iy(t)$ fastperiodisch und ist $\varphi_T(E)$ das durch $2T$ dividierte Maß derjenigen Teilmenge von $-T \leq t \leq T$, worin $z(t)$ in E liegt, dann existiert in einem passenden Sinne eine Grenzfunktion $\lim \varphi_T(E) = \varphi(E)$. Der Beweis beruht auf Anpassungen bekannter Sätze von Radon über totaladditive Mengenfunktionen und auf der Betrachtung von zweidimensionalen Momenten. *B. Jessen* (Kopenhagen).

Funktionentheorie:

Ghika, Alexandre: Sur un développement en série des fonctions monogènes uniformes. *Mathematica* **7**, 99—128 (1933).

En considérant des domaines D définis par M. Borel, l'auteur introduit des fonctions de la forme (1) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{f(r)}{z-r} dz$, où c_k sont les contours des cercles servant à la définition d'un domaine D . Les fonctions de l'auteur sont monogènes au sens de M. Borel. L'auteur démontre qu'à chaque domaine D on peut faire correspondre une suite de fonctions monogènes $\bar{\omega}_n(z)$ telles que toute fonction (1) peut être mise, dans un domaine Δ faisant partie de D , sous la forme $f(z) = \sum f_n \bar{\omega}_n(z)$.

Ce Mémoire est à rapprocher d'un travail de M. Trjitzinsky [Ann. of Math. 32, 623—658 (1931) ce Zbl. 2, 32]. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Cinquini, S.: *Sulle successioni di funzioni convergenti verso una funzione olomorfa.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 502—506 (1933).

There is stated a number of sufficient conditions in order that a sequence of functions converge to a holomorphic function. For instance: Let $\{w_n(z) = w_n(x + iy)\}$ be a sequence of complex continuous functions partially differentiable with respect to x and y everywhere in an open region D , and converging in D to a continuous function $w(z)$. Suppose that (I) the limits $\lim_n \frac{\partial w_n}{\partial x}$ and $\lim_n \frac{\partial w_n}{\partial y}$ exist everywhere in D and are bounded respectively on any straight line $y = \text{const}$ and $x = \text{const}$; (II) the sequence $\left\{ \frac{\partial w_n}{\partial x} \right\}$ on any straight line $y = \text{const}$ and the sequence $\left\{ \frac{\partial w_n}{\partial y} \right\}$ on any straight line $x = \text{const}$ are bounded in the neighborhood of any point, with the possible exception of an enumerable set; (III) $\lim_n \left(\frac{\partial w_n}{\partial x} + i \frac{\partial w_n}{\partial y} \right) = 0$ almost everywhere in D . Then the limit function $w(z)$ is holomorphic in the region D . *Saks* (Warszawa).

Rengel, Ewald: *Über einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung.* Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 1, 141—162 (1933).

Verf. hat sich die dankenswerte Aufgabe gestellt, die fruchtbaren Methoden, welche Grötzsch zu der Behandlung von Extremalaufgaben bei schlichten Abbildungen entwickelt hat [vgl. Leipziger Ber. 80, 367, 497 (1928); 81, 38, 217 (1929)], zu vereinfachen. Er erreicht dieses Ziel durch einen elementaren Beweis des Grötzschschen Satzes über maximale Flächenstreifen samt einer Verschärfung desselben. Der Beweis beruht auf einfachen Betrachtungen über Flächeninhalte und auf dem Schwarzschen Lemma. Die Verschärfung führt ihn zu der folgenden Präzisierung des Koebeschen Viertelsatzes, die für $n = 2$ vom Referenten bewiesen, für $n > 2$ vermutungsweise von ihm ausgesprochen worden ist. Es sei \mathfrak{G} das Bild des Einheitskreises bei einer normierten schlichten Abbildung, w_1, w_2, \dots, w_n die dem Nullpunkt nächstgelegenen Randpunkte von \mathfrak{G} auf n gleichwinkligen, von $w = 0$ ausgehenden Halbstrahlen. Sieht man von dem Falle ab, daß der Rand von \mathfrak{G} aus n regelmäßig verteilten nach $w = 0$ weisenden Halbstrahlen besteht, so gilt

$$\text{Max}(|w_1|, |w_2|, \dots, |w_n|) > \sqrt[n]{\frac{1}{4}}.$$

Auch andere bekannte Sätze von Bieberbach, Grötzsch, Pólya und Pick werden sodann verschärft. *Szegő* (Königsberg, Pr.).

Behnke, H., und P. Thullen: *Maximalteiler und Regularitätshüllen. Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Carathéodory.* Math. Z. 37, 310—313 (1933).

Soit Δ un domaine d'holomorphic (Regularitätsbereich). Pour que D soit un sous-domaine maximum (Maximalteiler) de Δ par rapport à un point O intérieur, il faut et il suffit que le domaine d'holomorphic associé à D (Regularitätshülle) soit sous-domaine maximum de Δ par rapport à O . Application: Δ est un dicylindre. *Cartan*.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:

Bernstein, S.: *Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires.* (Zürich, Sitzg. v. 5.—12. IX. 1932.) Verh. internat. Math.-Kongr. 1, 288—309 (1932).

Ein Bericht über einige neuere Arbeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vom Verf. sowie von Chapman, Fréchet, Hostiński, Kolmogoroff, v. Mises und Romanowsky). Als leitende Idee wird dabei die systematische Untersuchung der asymptotischen Eigenschaften der Reihen miteinander verbundener zufälliger Größen hervorgehoben. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Steffensen, J. F.: *Deux problèmes du calcul des probabilités.* Ann. Inst. H. Poincaré 3, 319—344 (1933).

Zwei Vorträge, welche im Institut Henri Poincaré gehalten wurden. Im ersten Vortrage gibt Verf. eine Übersicht verschiedener Korrelationsmaße und definiert ein

neues derartiges Maß. Der zweite Vortrag ist der Berechnung der Wahrscheinlichkeit gewidmet, mit welcher die ganze Nachkommenschaft eines Individuums nach einer gegebenen Anzahl von Generationen verschwindet. Eine elegante Anwendung von Iterationen gewisser Polynome auf die Lösung dieses Problems ist ausführlich behandelt. Die entsprechenden Arbeiten von R. A. Fisher [The genetical theory of natural selection (1930) Oxford Press] scheinen dem Verf. unbekannt geblieben zu sein. *A. Kolmogoroff.*

Kolmogoroff, A.: Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse. Math. Ann. **108**, 149—160 (1933).

Der Prozeß der Veränderung eines physikalischen Systems, dessen Zustände x eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit \mathfrak{R} bilden, heißt stochastisch definit, wenn für jeden Zustand x und jedes Gebiet \mathfrak{E} von \mathfrak{R} bei beliebiger Wahl der Zeitmomente t' und t'' ($t' < t''$) die Wahrscheinlichkeit $P(t', x, t'', \mathfrak{E})$ bestimmt ist, daß im Zeitpunkt t'' ein Zustand aus \mathfrak{E} stattfindet, falls zur Zeit t' ein Zustand x bestand. Es wird vorausgesetzt, daß eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t', x, t'', y)$ existiert, derart daß

$$P(t', x, t'', \mathfrak{E}) = \int_{\mathfrak{E}} f(t', x, t'', y) dV_y$$

gilt. Die Funktion f wird den Bedingungen

$$\int_{\mathfrak{R}} f(t', x, t'', y) dV_y = 1, \quad (1)$$

$$f(t_1, x, t_3, y) = \int_{\mathfrak{R}} f(t_1, x, t_2, z) f(t_2, z, t_3, y) dV_z, \quad t_1 < t_2 < t_3 \quad (2)$$

unterworfen. Es entsteht das Problem, die Funktion f als Lösung dieser Integralgleichungen durch zusätzliche Bedingungen zu kennzeichnen. In einer früheren Arbeit (Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. **104**; dies. Zbl. **1**, 149) zeigte der Verf. für den eindimensionalen Fall, daß unter gewissen Voraussetzungen über f diese Funktion Differentialgleichungen vom parabolischen Typus genügt. Es entsteht die in jener Arbeit noch nicht beantwortete Frage der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung f von (1) und (2) durch die Koeffizienten dieser Differentialgleichungen. — In der vorliegenden Arbeit wird zunächst die entsprechende Theorie für allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten durchgeführt. Hier ergeben sich unter gewissen Voraussetzungen über $f(s, x, t, y)$ die Differentialgleichungen

$$f_s = - \sum A_i(s, x) f_{x_i} - \sum B_{ij}(s, x) f_{x_i x_j} \quad (3)$$

und

$$Q(t, y) f_t = - \sum \frac{\partial}{\partial y_i} [A_i(t, y) Q(t, y) f] + \sum \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [B_{ij}(t, y) Q(t, y) f]. \quad (4)$$

Sodann wird das Eindeutigkeitsproblem für geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeiten durch den folgenden Satz beantwortet: Es existiert höchstens eine nicht negative stetige Lösung f der Gleichungen (1) und (2), welche der Gleichung (4) mit den gegebenen zweimal stetig differenzierbaren Koeffizienten A_i und B_{ij} und der Bedingung

$$\int_{\mathfrak{R}} f(s, x, t, y) Q^2(x, y) dV_y \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0$$

genügt.

Lüneburg (Göttingen).

Koeppler, H.: Equazioni alle derivate parziali della teoria della probabilità che intervengono anche nella teoria del calore. Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 245—267 (1933).

Die Abhandlung enthält eine Ableitung der Fokker-Planckschen Differentialgleichung eines dreidimensionalen stochastischen Prozesses aus der Smoluchowskischen Integralgleichung; Verf. beschränkt sich (was übrigens nicht explizit betont wird) auf den homogenen Fall, so daß die gewöhnliche Wärmeleitung als Resultat erscheint. Die Ableitung kann keinen Anspruch auf mathematische Strenge erheben; insbesondere fehlt eine genaue Angabe der Voraussetzungen; zwischen Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichte wird nicht unterschieden. Es sei bemerkt, daß eine erschöpfende Lösung des Problems, auch für den nichthomogenen Fall und beliebige Dimensionszahl, kürzlich Kolmogoroff gegeben hat [Math. Ann. **108**, 149 bis 160 (1933); vgl. vorst. Referat].

A. Khintchine (Moskau).

Denjoy, Arnaud: Sur les variables pondérées multipliables de M. Cantelli. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1712—1714 (1933).

Die selbstverständliche Tatsache, daß n zufällige Größen stochastisch unabhängig sein können, ist nicht in einfacher Weise in einer Ebene im Cantellischen Sinne darstellbar, und kann daher von diesem Standpunkt aus nicht ohne weiteres behauptet werden. Der Verf. bemerkt, daß man zu einer solchen Darstellung unter Benutzung der Peano'schen Kurve gelangen kann, welche eine zweckmäßige Abbildung zwischen der unmittelbaren n -dimensionalen und der gewünschten ebenen Darstellung gestattet. — Analog wird bewiesen, daß auch unendlich viele zufällige Größen, mit beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, untereinander stochastisch unabhängig sein können.

Bruno de Finetti (Trieste).

Bonferroni, C. E.: Sulla probabilità massima nello schema di Poisson. Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 109—115 (1933).

Als Poissonsches Schema wird ein durch die Folge p_1, \dots, p_n, \dots charakterisiertes Schema bezeichnet, wobei p_n die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß in einer Folge von Versuchen beim n -ten Versuch ein bestimmtes Ereignis eintritt. Die Wahrscheinlichkeit $U(s, n)$, daß im Verlauf von n Versuchen dieses Ereignis s mal realisiert wird, genügt alsdann der Gleichung

$$U(s, n) = p_n U(s-1, n-1) + q_n U(s, n-1).$$

Der Verf. beweist eine Anzahl von Eigenschaften der Funktionen $U(s, n)$, insbesondere Aussagen über das Maximum T_n der Funktion $U(s, n)$, das nur in einem Punkt oder aber in zwei aufeinanderfolgenden Punkten s und $s+1$ angenommen werden kann. U. a. wird gezeigt, daß die Differenz $x'_n - x_n$, wobei x_n die wahrscheinliche Häufigkeit des Ereignisses und x'_n der wahrscheinlichste Wert von $\frac{s}{n}$ ist, mit wachsendem n gegen Null konvergiert; ferner daß, falls die Folge p_n einen von 0 und 1 verschiedenen Häufungspunkt besitzt, das Maximum T_n mit wachsendem n gegen 0 konvergiert. Daß dies im Fall, daß 0 oder 1 als Häufungspunkt auftritt, nicht notwendig gilt, wird an einigen Beispielen illustriert.

Lüneburg (Göttingen).

Craig, Cecil C.: On the Tchebycheff inequality of Bernstein. Ann. math. Statist. **4**, 94—102 (1933).

L'auteur expose la démonstration donnée par S. Bernstein de l'évaluation d'une limite inférieure de la probabilité P de l'égalité

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \geq t\sigma;$$

$P > 1 - 2e^{-\frac{t^2}{2+2ht}}$, en supposant $\zeta x_i = 0$, $\zeta |x_i|^k \leq \frac{1}{2} k' \cdot h^{k-2} \zeta x_i^2$, où $k > 2$, et $\sum_{i=1}^n \zeta x_i^2 = \sigma^2$ et indique quelques modifications de la condition suffisante pour la validité de la même inégalité.

S. Bernstein (Charkow).

Wishart, J., and M. S. Bartlett: The generalised product moment distribution in a normal system. Proc. Cambridge Philos. Soc. **29**, 260—270 (1933).

Ist $f(x_1, \dots, x_n)$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion für die zufälligen Variablen x_1, \dots, x_n , so kann sie festgelegt werden durch ihre Laplacesche Adjungierte (moment generating function):

$$M = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) e^{i \sum_{\nu=1}^n t_{\nu} x_{\nu}} dx_1 \dots dx_n.$$

Setzt man $c_{\nu} = \sum_{\lambda=1}^n x_{\nu, \lambda}$, $c_{\mu, \nu} = \sum_{\lambda=1}^n x_{\mu, \lambda} x_{\nu, \lambda}$, so entsteht die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit $f(c)$ dieser Ausdrücke c_{ν} und $c_{\mu, \nu}$ zu bestimmen. In der vorliegenden Arbeit wird diese Bestimmung mit Hilfe der Laplaceschen Adjungierten Methode für normale Verteilungen

$$f = \pi^{-\frac{p}{2}} |A|^{\frac{1}{2}} e^{-A(x, x)}; \quad A(x, x) = \sum \alpha_{\mu, \nu} x_{\mu} x_{\nu}$$

durchgeführt. Dies geschieht nach Maßgabe der folgenden Überlegung: Es wird zunächst die Adjungierte für die simultane Verteilung von x_ν und $x_\nu x_\mu$ durch das Integral

$$M = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) e^{i[T(x, x) + 2 \sum_1^n t_\nu x_\nu]} dx_1 \dots dx_n$$

bestimmt. $T(x, x) = \sum t_{\mu, \nu} x_\mu x_\nu$. — Die Adjungierte

$$M_{c_\nu, c_\mu, \nu} = \int \dots \int f(c) e^{i[\sum c_{\mu, \nu} t_{\mu, \nu} + 2 \sum c_\nu t_\nu]} dc$$

der gesuchten Funktion $f(c)$ ist alsdann einfach durch $M_{c_\nu, c_\mu, \nu} = M^n$ gegeben, so daß sich $f(c)$ durch Anwendung des Fourierschen Integraltheorems ergibt. *Lüneburg.*

Pankraz, Otomar: Sur la désagrégation d'un groupe statistique. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 172, 1—8 u. franz. Zusammenfassung 9—10 (1933) [Tschechisch].

Es sei 1. $f_i(t)$ = die Anzahl derjenigen Individuen, die aus einer statistischen Gesamtheit (Kollektiv) im Laufe des Zeitintervalls $< 0, t >$ infolge des Verlustes des Merkmales $i = 1, 2, \dots, n$ ausgetreten sind; 2. $p_i(t, \xi)$ = die Wahrscheinlichkeit, daß das Individuum, welches im Augenblicke ξ das Merkmal i verloren hat, bis zur Zeit t noch immer (d. h. ununterbrochen) ohne dieses Merkmal ist; 3. $q_i(t, \xi)$ = die Rückkehrintensität infolge des Wiedererwerbens des Merkmales i in der Zeit t . Bedeutet $l(t)$ die Anzahl derjenigen Individuen, die in der Zeit t in das Kollektiv gehören, dann gilt für den zeitlichen Zerfall des Kollektivs die Grundrelation

$$\int_{t_1}^t dl(\xi) = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{t_1}^t d\sigma \int_0^\sigma p_i(t, \xi) q_i(t, \xi) df_i(\xi) - \int_{t_1}^t df_i(\xi) \right\}$$

($0 \leq t_1 \leq t \leq 1$, $t_1 \leq \sigma \leq t$, $0 \leq \xi \leq \sigma$). Man setzt voraus, daß alle Funktionen stetig sind. Soll $l(t)$ eine glatte Funktion sein, dann kommt man zur Integrodifferentialgleichung

$$\frac{dl(t)}{dt} = \eta(t) \cdot l(t) + \int_0^t K(t, \xi) l(\xi) d\xi,$$

wo

$$\eta(t) = - \sum_{i=1}^n \eta_i(t), \quad \eta_i(t) = \frac{f'_i(t)}{l(t)} = \text{die Austrittsintensität,}$$

$$K(t, \xi) = \sum_{i=1}^n p_i(t, \xi) \cdot q_i(t, \xi) \cdot \eta_i(\xi), \quad l(0) = \text{gegebene Anfangsbedingung.}$$

K. Rychlik (Prag).

Pollacek-Geiringer, H.: Korrelationsmessung auf Grund der Summenfunktion. Z. angew. Math. Mech. 13, 121—124 (1933).

Für eine zweidimensionale arithmetische Verteilung $v(x, y)$; $x = 0, \dots, \kappa$; $y = 0, \dots, \varkappa$ wird durch das Pearsonsche Kontingenzmaß

$$f^2 = \frac{1}{\kappa - 1} \sum_{x, y} \frac{(v(x, y) - v_1(x) v_2(y))^2}{v_1(x) v_2(y)},$$

$$v_1(x) = \sum_y v(x, y), \quad v_2(y) = \sum_x v(x, y)$$

ein Maß für die Abhängigkeit der Größen x und y bestimmt. Im Fall der Unabhängigkeit ist $f^2 = 0$, im Fall, daß jedem x eindeutig ein Wert y zugeordnet ist, ist $f^2 = 1$. Der Verf. definiert nun in der vorliegenden Arbeit für beliebige zweidimensionale Verteilungsfunktionen $V(x, y)$ ein Korrelationsmaß in der folgenden Weise. Es sei $A(x, y) = V(x, y)$ die Gesamtwahrscheinlichkeit des Bereiches $(-\infty, x], (-\infty, y]$; $D(x, y)$ die des Bereiches $(x, \infty), (y, \infty)$, $C(x, y)$ die des Bereiches $(x, \infty), (-\infty, y]$ und $B(x, y)$ die des Bereiches $(-\infty, x], (y, \infty)$. Dann wird als Korrelationsmaß der Ausdruck

$$F = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (AD - BC) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (AD + BC) dx dy}$$

eingeführt. Dieser Ausdruck wird Null für den Fall der Unabhängigkeit

$$V(x, y) = W_1(x) W_2(y)$$

und dann und nur dann 1, wenn alle Wahrscheinlichkeit auf einer nicht absteigenden Kurve der x, y Ebene konzentriert ist. Als Anwendung berechnet der Verf. das Maß F für den Fall der Bernoullischen Korrelation und der Gaußschen Verteilung (Normal-korrelation). *Lüneburg* (Göttingen).

Jacob, M.: *Sullo sviluppo di una curva di frequenza in serie di Charlier tipo B.* Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 221—234 (1933).

Es sei $\varphi(x)$ eine arithmetische Verteilungsfunktion, definiert für die ganzen Zahlen $x \geq 0$, und es sei $\sum_{x=0}^{\infty} \varphi(x) = 1$. — Der Verf. behandelt das Problem, eine solche Funktion in eine Reihe der Form (Charliersche B -Reihen):

$$\varphi(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \psi_v(x)$$

zu entwickeln. Dabei sind die $\psi_v(x)$ für ganzzahlige x durch die erzeugende Funktion

$$\psi(x, a) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{e^{-a} a^x}{x!}, & x \geq 0 \end{cases}$$

erklärt, und zwar entweder durch eine Differenzenoperation:

$$\psi_n(x) = -\psi_{n-1}(x) + \psi_{n-1}(x-1); \quad \psi_0 = \psi(x, a),$$

oder aber durch Differentiation:

$$\psi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \psi(x, a).$$

Es ist dabei $\psi_n(x) = \psi_0(x) p_n(x)$ und $p_n(x)$ ein Polynom n -ten Grades. — Nach Beweis einiger Eigenschaften des orthogonalen Funktionensystems $\psi_n(x)$ zeigt der Verf. den folgenden Entwicklungssatz: Wenn $\varphi(x)$ die Bedingung

$$\sum_{x=0}^{\infty} \varphi(x) \frac{(\psi(x))^{-\frac{1}{2}}}{1+x} < \infty$$

erfüllt, so besteht die konvergente Entwicklung:

$$\varphi(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \psi_v(x)$$

und zwar ist

$$a_v = \frac{a^v}{v!} \sum_{x=0}^{\infty} \varphi(x) p_v(x).$$

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung früherer Konvergenzsätze über solche Reihen dar, die von Pollaczek-Geiringer und Szegö unter Voraussetzungen bewiesen wurden, die in der obigen enthalten sind. *Lüneburg* (Göttingen).

Hojo, Tokishige: *A further note on the relation between the median and the quartiles in small samples from a normal population.* Biometrika **25**, 79—90 (1933).

Insolera, Filadelfo: *Su note proprietà attribuite alle funzioni quiquestiane e valide per ogni altra funzione di sopravvivenza.* Giorn. Mat. Finanz., II. s. **3**, 1—12 (1933).

Numerische und graphische Methoden.

Russell, J. B.: *A table of Hermite functions.* J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **12**, 291—297 (1933).

Sherman, J.: *A four place table of $\frac{\sin x}{x}$.* Z. Kristallogr. A **85**, 404—419 (1933).

Meidell, Birger: *Über mechanische Ausgleichung.* Skand. Aktuarie Tidskr. **16**, 94—113 (1933).

Bei der Anwendung einer vorgelegten mechanischen Ausgleichungsformel

$$\bar{\psi}(z) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi(x_i) \quad (1)$$

auf eine (aus gesuchter unterliegender Funktion $\psi_1(x)$ und verdeckender Schwankungsfunktion $\psi_2(x)$) zusammengesetzte Funktion $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ läßt sich das rein theoretische Ziel der Ausgleichung ausdrücken als

$$\bar{\psi}_k(z) = \lambda_k \psi_k(z), \quad \text{wo} \quad \lambda_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k=1 \\ 0 & \text{,, } k=2 \end{cases} \quad (2)$$

Eine symmetrische Ausgleichungsformel (d. h. eine, bei welcher z das arithmetische Mittel der $n+1$ symmetrisch um z liegenden Werte x_i ist und $\alpha_i = \alpha_{n-i}$, $n=2m$) bringt in der Fourierentwicklung einer Schwankungsfunktion im Intervall $(a, a+p)$ die ersten r Glieder zum Verschwinden, wenn

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \cos \left[\nu \frac{2\pi}{p} (z - x_i) \right] = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, r \left(r \leq \frac{n}{2} \right) \quad \text{und} \quad \int_a^{a+p} \psi_2(z) dz = 0.$$

Im praktisch wichtigen Fall, daß $x_i = x + i$, $z = x + j$, wo i und j positive ganze Zahlen und $0 < j < n$, liefern die Lösungen der aus (2) und (1) resultierenden linearen Differenzgleichung

$$\lambda \psi(x+j) = \sum_0^n \alpha_i \psi(x+i)$$

alle Funktionen ψ_1 und ψ_2 , welche (2) erfüllen. Sie lauten

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varrho_i^x,$$

wo die c_i willkürliche Konstanten sind, und die ϱ_i die Wurzeln der charakteristischen Gleichung bedeuten:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + (\alpha_j - \lambda) x^j + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0.$$

Es wird ein Verfahren angegeben, wie für jeden speziellen Fall die „beste“ Ausgleichungsformel zu bestimmen ist. — Zum Schluß zeigt Verf., wie man durch eine naheliegende Minimumsforderung für das von ihm eingeführte Dämpfungsmaß

$$D^2 = \frac{\int_a^{a+p} \bar{\psi}(z)^2 dz}{\int_a^{a+p} \psi(z)^2 dz}$$

auf die wohlbekannte Landresche Forderung $\sum_0^n \alpha_i^2 = \text{Minimum}$ geführt wird.
S. Gradstein (Amsterdam).

Steffensen, J. F.: Remarks on iteration. Skand. Aktuarie Tidskr. 16, 64–72 (1933).

Verf. empfiehlt zur numerischen Lösung einer Gleichung, dieselbe in der Form $x = f(x)$ zu schreiben, mit einer Annäherung x_0 anzufangen, $x_1 = f(x_0)$ und $x_2 = f(x_1)$ zu berechnen. Eine neue gute Annäherung ist dann: $x = x_0 - (\Delta x_0)^2 / \Delta^2 x_0$, wo Δ und Δ^2 die zwei ersten Differenzen im Differenzenschema des Newtonschen Interpolationsschemas bedeuten. Numerische Anwendungen werden gegeben. *Burrau.*

Meyer zur Capellen, W.: Zur kinematischen Analyse einiger mathematischer Instrumente. Z. Instrumentenkde 53, 56–64 u. 108–113 (1933).

Die Getriebe verschiedener mathematischer Instrumente (Planimeter, Analysatoren, Integratoren) werden kinematisch analysiert. *Prager* (Göttingen).

Hoecken, K.: Ellipsenzeichner. Z. Instrumentenkde 53, 286–288 (1933).

Das Instrument ist eine praktisch brauchbare mechanische Durchbildung der Konstruktion der Ellipse mittels der über den Achsen als Durchmesser beschriebenen Kreise [vgl. Z. Instrumentenkde 39, 333 (1919)]. Es lassen sich Ellipsen kleinster Abmessung und bis zur Entartung in eine Gerade genau und in einem Zuge zeichnen, einige axonometrische Darstellungen sogar unmittelbar in Tusche. Ein besonderer Vorteil ist die geradlinige Anordnung des Instrumentes, die eine Verschiebung längs der Reißschiene gestattet. Eine größere Anzahl Zeichenproben erläutern die vielseitige Verwendbarkeit des Ellipsenzeichners.
G. Koehler (Erfurt).

The log-log slide rule. Engineer, London 155, 346—347 (1933).

Beschreibung eines Sonderschiebers zur Auswertung der Zinsseszinsformel, Adaptation der log-log-Teilung an die den praktischen Bedürfnissen entsprechenden Bereiche, Zusammenstellung der verschiedenen Ablesevorschriften. *S. Gradstein* (Amsterdam).

Fuss, H.: Eine neue logarithmische Rechenmaschine. Z. Instrumentenkde 53, 207 bis 220 u. 257—266 (1933).

Die neue Rechenmaschine der Askania-Werke dient zum multiplizieren, dividieren, potenzieren und radizieren von trigonometrischen Funktionen und reinen Zahlen. Es werden logarithmische Teilungen angewandt, die auf langen Stahlbändern aufgebracht sind. Als logarithmische Einheit wurden 150 cm gewählt, dabei sind Einheiten der vierten Stelle bequem abzulesen. Die Wirkungsweise der Rechenmaschine ähnelt dem Rechenschieber, indem die einzelnen Bänder sowohl einzeln als auch zu je zweien gekuppelt werden können, wodurch sich beliebige Längen addieren bzw. subtrahieren lassen. Die Ablesung geschieht mittels mit Indexstrich versehenen Fensters, unter dem das Stahlband gleitet. Die Stahlbänder sind nach Art des Kinofilms perforiert, der Transport erfolgt durch Stiftwalzen. Die Kupplung wird durch Elektromagnete bewirkt, die mit auf der Vorderseite der Maschine angeordneten Tasten betätigt werden. Gleichzeitig mit den Kupplungsmagneten werden Haltemagnete für die nicht gekuppelten Bänder eingeschaltet, wodurch die gegenseitige Lage der Bänder unbedingt gesichert wird. Die Bewegung der 12 m langen Stahlbänder erfolgt sehr schnell durch eine Grobbewegung. Um die Einstellung zu erleichtern, verschiebt sich hierbei ein Läufer über einer Hilfsteilung, so daß die gerade unter dem Ablesefenster befindliche Stelle des Stahlbandes ständig kenntlich gemacht ist. Die genaue Einstellung erfolgt dann mittels einer Feinbewegung. Die Handhabung der Maschine wird ausführlich an zahlreichen Beispielen erläutert. Die bei sorgfältigem Arbeiten erreichbare Genauigkeit wird mit 0,015% angegeben. *G. Koehler* (Erfurt).

Geometrie.

Heiseler, Artur: Herleitung und Konstruktion des eigentümlichen Näherungswertes
 $\frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6}) = 3,1416 \dots$ und Herstellung der Strecken $\sqrt{\pi}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ und $\frac{1}{2\pi}$ in einer Figur. Allg. Vermessgs-Nachr. 45, 421—426 (1933).

Vgl. dies. Zbl. 3, 166.

Botea, N. G.: Über eine Eigenschaft des Dreiecks. Gaz. mat. 38, 206—211, 241 bis 245 u. 367—372 (1933) [Rumänisch].

Botea, N. G.: Sur la configuration formée par deux triangles et deux points. Mathesis 47, 174—181 (1933).

Bunch, W. H.: Pascal's hexagram with certain elements in motion. Amer. Math. Monthly 40, 251—260 (1933).

Ausführliche Untersuchungen über die Lagebeziehungen in einem vollständigen Pascalschen Sechseck, wenn 5 Punkte fest sind, der 6. Punkt des Sechsecks auf dem Kegelschnitt wandert. *Moufang* (Königsberg i. Pr.).

Ciani, E.: Intorno alle biquintuple di rette. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 215—216 (1933).

L'existence et certaines propriétés des biquintuples de droites avaient déjà été obtenues par l'a. — avant B. Segre [Atti Accad. naz. Lincei, Mem. (6) 2, 204 (1927)] — dans l'étude d'un particulier groupe icosaédrique d'omographies de l'espace [Ann. Mat. pura appl. (3) 8 (1902).] *Beniamino Segre* (Bologna).

Inagaki, Masaru: Some generalizations of Gergonne's theorem. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 22, 1—5 (1933).

1 A_i ist dem Kegelschnitt K_1 umschrieben. Die Tangentenpaare von den Berührungspunkten D_i an einen zweiten Kegelschnitt K_2 schneiden K_1 in drei Punktpaaren

mit den Verbindungslinien d_i . Die Pole von d_i in bezug auf K_1 sind \bar{D}_i . Dann laufen die Geraden $A_i \bar{D}_i$ durch einen Punkt. Die Dreiecke D_i und d_i sind perspektiv. — Befinden sich K_1 (Ordnungskegelschnitt) und K_2 (Klassenkegelschnitt) in Schließungslage, so berührt die Perspektivitätsachse K_2 . — Verallgemeinerungen: An Stelle des Dreiecks tritt ein Polygon und, bei der räumlichen Verallgemeinerung eines Spezialfalles, ein Tetraeder.

E. A. Weiss (Bonn).

Kubota, Tadahiko: A remark to the preceding note. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 22, 6—8 (1933).

Neue Beweise für die Sätze der vorstehenden Arbeit. *E. A. Weiss (Bonn).*

Tietze, Heinrich: Über die Proportionalität der aus Punktkoordinaten und der aus Ebenenkoordinaten gebildeten Geradenkoordinaten. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 1, 135—148 (1933).

Die Proportionalität der aus Punktkoordinaten x gebildeten Linienkoordinaten p_{ik} und der aus Ebenenkoordinaten u gebildeten Linienkoordinaten q_{ik} (Satz B) wird durch den Beweis des folgenden (allgemeineren) Satzes A nachgewiesen: Jede zweireihige Determinante M der aus den Linienkoordinaten p_{ik} und q_{ik} gebildeten Matrix läßt sich als lineare Kombination der Invarianten $(x^{(i)} u^{(k)})$ mit geeigneten (übrigens nicht eindeutig bestimmten) Polynomen in den $x_v^{(i)}$ und $u_v^{(k)}$ als Koeffizienten darstellen. Es folgt die Umkehrung des Satzes B: Hat die aus Linienkoordinaten p_{ik} und q_{ik} gebildete Matrix den Rang 1, so gelten die Inzidenzrelationen $(x^{(i)} u^{(k)}) = 0$. Sämtliche Sätze werden sogleich in ihrer Verallgemeinerung auf den R_n bewiesen. Für den Fall des R_3 werden explizite Darstellungen der Determinanten M angegeben. *Weiss.*

Cattaneo, Paolo: Sulle linee piane razionali. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 139 (1933).

Date parametricamente le coordinate omogenee dei punti di una linea piana razionale, si trovano le equazioni della linea stessa e dell'involuppo delle sue tangenti. *Autoreferat.*

Walther, A., und Th. Zech: Bemerkungen zur angenäherten Tangentenkonstruktion von Pirani. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 85, 45—56 (1933).

Nach einfachen Bemerkungen darüber, bei welchen Kurven die Piranische Tangentenkonstruktion immer die richtige Tangente liefert, wird die Genauigkeit der Piranischen Konstruktion untersucht. Für eine analytisch von der Bogenlänge abhängende Kurve wird der Fehler δ in Abhängigkeit von dem Radius des Piranischen Hilfskreises als Potenzreihe dargestellt. Eine brauchbare Abschätzung von δ wird bei Kurven von beschränkter Krümmung elementar dadurch gewonnen, daß man in der Umgebung des betrachteten Kurvenpunktes P die Kurve in zwei in P berührende Kreise mit den Extremalkrümmungsradien einschließt. Ist die Krümmungsänderung beschränkt, so treten Klothoiden an die Stelle der Kreise. Zum Schluß wird gezeigt, daß die Kurven, bei denen der Winkel zwischen Normale und Affinnormale konstant ist, logarithmische Spiralen sind.

R. Iglsch (Aachen).

● **Pomey, J.-B.:** Application des imaginaires au calcul vectoriel. Complément à la conférence sur le calcul vectoriel. (Sect. de Radioélectr., École Sup. d'Electr., Paris.) Paris: Gauthier-Villars 1933. VI, 70 S. Fres. 20.—

Darstellung der Vektorrechnung der Ebene mit Hilfe der komplexen Zahlen und Anwendung auf die Elektrotechnik und verwandte Gebiete. Abweichend von vielen anderen Darstellungen werden weniger die Koordinaten der komplexen Zahl, als sie selbst und ihre Konjugierte verwendet. — Hauptteile: Theorie der komplexen Größen und ihrer Anwendung auf Geometrie und Physik. — Elektrotechnik. — Theorie der elliptischen Schwingungen. — Die komplexe Kugel und die Formel von Cayley für endliche Drehungen.

L. Schrutka (Wien).

Weber, C., und H. Seifert: Die beiden Dodekaederräume. Math. Z. 37, 237 bis 253 (1933).

Eine dreidimensionale Raumform entsteht aus dem sphärischen, euklidischen oder hyperbolischen Raum durch Identifizierung entsprechender Punkte bei einer fixpunktlosen Bewegungsgruppe, oder aus dem Fundamentalbereich dieser Gruppe

durch Identifizierung entsprechender Randpunkte. Ist ein Polyeder als Fundamentalbereich gegeben und sind seine Ränder paarweise kongruent und durch Bewegungen aufeinander bezogen, so müssen die Kantenwinkeln an äquivalenten Kanten zusammen 2π ergeben, und diese Bedingung reicht auch hin, damit zu dem Fundamentalbereich eine Gruppe und damit eine Raumform gehört. In dieser Arbeit werden zwei Fälle untersucht, bei denen der Fundamentalbereich ein Dodekaeder ist, in welchem Paare gegenüberliegende Seitenflächen einander zugeordnet werden, und zwar einmal um $\frac{2\pi}{10}$, einmal um $\frac{6\pi}{10}$ verschraubt. So entstehen zwei geschlossene Raumformen: der sphärische und der hyperbolische Dodekaederraum. Der sphärische Dodekaederraum wird als homöomorph mit dem Dehnschen Kleeblattschlingenraum (M. Dehn, Math. Ann. **69**, 160) und mit dem Poincaréschen Raum (Rend. Circ. mat. Palermo **18**, 109) nachgewiesen, und zwar auf Grund der Tatsache, daß alle drei Räume sich fasern lassen (vgl. H. Seifert, Acta math. **60**; dieses Zbl. **6**, 83). Der hyperbolische Dodekaederraum läßt sich nicht fasern.

van der Waerden (Leipzig).

Haupt, Otto: Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen. Mh. Math. Phys. **40**, 1—53 (1933).

Frühere Arbeiten des Verf. und von Juel, Marchaud und Mukhopadhyaya beruhen auf dem Begriff der Ordnung einer ebenen Kurve K als der Maximalzahl von Punkten, die K mit einer Geraden, bzw. einer Geraden eines festen Geradenbüschels, bzw. einem Kreise gemein hat. Untersucht wurden vor allem Strukturfragen wie die, eine Kurve als Summe von Kurven kleinerer Ordnung (z. B. Konvexbogen) darzustellen, die Anzahl von Punkten gewisser Ordnungen einer Kurve (z. B. Scheitelpunkten, Wendepunkten) abzuschätzen, usw. Verf. verallgemeinert nun den Ordnungsbegriff auf folgende Weise. In einem einfach zusammenhängenden, beschränkten, von einer einfachen geschlossenen Kurve begrenzten Grundgebiet G sei ein Bogen B (topologisches Bild der Strecke) gegeben; weiter liege vor ein System \mathfrak{K} von topologischen Streckenbildern mit den Endpunkten und nur diesen auf dem Rande von G und von topologischen Kreisbildern, deren jedes bis auf höchstens einen Punkt in G verläuft; diese topologischen Strecken und Kreise heißen kurz \mathfrak{K} -Kurven. Verlangt werden von dem System \mathfrak{K} folgende 4 Eigenschaften: 1. Kein Teilbogen von B ist enthalten in einer \mathfrak{K} -Kurve; 2. für ein gewisses $k \geq 1$ läßt sich durch je k Punkte von G , die zu B oder zu einer \mathfrak{K} -Kurve hinreichend benachbart sind, mindestens eine \mathfrak{K} -Kurve legen; 3. je 2 \mathfrak{K} -Kurven haben, abgesehen evtl. von endlich vielen festen, d. h. allen \mathfrak{K} -Kurven gemeinsamen Grundpunkten, höchstens $k - 1$ Punkte gemein; 4. durch stetige Änderung von k (nicht unter den evtl. Grundpunkten vorkommenden) Punkten einer \mathfrak{K} -Kurve K ändert sich K stetig. Verf. nennt nun \mathfrak{K} -Ordnung des Bogens B die Maximalanzahl von Punkten, die B mit einer \mathfrak{K} -Kurve gemein hat (falls diese Maximalanzahl nicht existiert, spricht man von wachsender bzw. unendlicher Ordnung). Jedem Punkt p von B wird als \mathfrak{K} -Ordnung bzw. linksseitige, bzw. rechtsseitige \mathfrak{K} -Ordnung zugeordnet die gemeinsame \mathfrak{K} -Ordnung aller hinreichend kleinen Bogen $\subset B$, die p im Inneren, bzw. als rechten, bzw. linken Endpunkt enthalten. Auch für diesen Ordnungsbegriff gilt die vom Verf. (vgl. dies. Zbl. **1**, 172) entwickelte Strukturtheorie. Jetzt wird insbesondere gefragt nach der Struktur der Bogen der \mathfrak{K} -Ordnung $k + 1$. Verf. setzt dabei (im Anschluß an Mukhopadhyaya) voraus, daß der Bogen B die folgende spezielle Eigenschaft besitzt: Bewegt man eine \mathfrak{K} -Kurve K , die mit B $k + 1$ Punkte gemein hat, um hinreichend wenig so, daß $k - 1$ Schnittpunkte fest bleiben, dann bewegen sich die anderen beiden Schnittpunkte auf B entgegengesetzt. Dies ist z. B. der Fall, wenn die Schnittpunkte auf K und B simultan natürlich geordnet liegen. Verf. beweist: Der Bogen B enthält mindestens einen, jedoch höchstens $3 \cdot 2^{k-1} - 1$ Punkte der \mathfrak{K} -Ordnung $k + 1$. Er enthält jedoch keine Punkte der einseitigen \mathfrak{K} -Ordnung $k + 1$, da ein solcher Häufungspunkt einer Folge von Punkten der \mathfrak{K} -Ordnung $k + 1$ ist. Es existieren keine primitiven Bogen der \mathfrak{K} -Ordnung $k + 1$,

d. h. Bogen, in denen jeder Teilbogen ebenfalls die \mathfrak{R} -Ordnung $k + 1$ hat. Der Bogen B läßt sich darstellen als Summe von höchstens $3 \cdot 2^{k-1}$ Bogen der \mathfrak{R} -Ordnung k . *Nöbeling*.

Marchaud, A.: Sur une condition de quasi-rectificabilité. *Fundam. Math.* **20**, 105—116 (1933).

Unter einem einfachen Bogen B im euklidischen R_n verstehe man, wie üblich, das topologische Bild einer Strecke s . Ferner heiße B von endlicher (bzw. von p -ter) Relativordnung in einem Büschel H von Hyperebenen mit der $[(n-2)$ -dimensionalen] Achse w , wenn jede Büschelhyperebene (abgekürzt: B.-H.-E.) mit B nur endlich viele (bzw. höchstens p) Punkte gemeinsam hat. Liegen auf der B.-H.-E. E insgesamt k Punkte von B , so heißt E von der Höhe k . — Nun gilt folgender Satz: Im R_n seien gegeben n Hyperebenenbüschel H_v , deren Achsen w_v so liegen, daß durch die Gesamtheit ihrer gemeinsamen eindimensionalen Sekanten (Geraden) eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche $[w]$ definiert ist. Ferner sei B ein einfacher Bogen, welcher keinen Punkt mit $[w]$ gemeinsam hat. Bekannt war: Ist B von beschränkter Relativordnung in allen H_v , so ist B rektifizierbar. Nunmehr zeigt Verf.: Ist B nur von endlicher Relativordnung in allen H_v , so ist B „quasi-rektifizierbar“, d. h. B kann ersetzt werden durch einen einfachen Bogen, welcher erstens von beschränkter Relativordnung in allen H_v , und mithin rektifizierbar ist; zweitens mit B zusammenfällt, ausgenommen höchstens auf einer offenen Punktmenge O auf B , wobei das Maß des Urbildes von O (auf der Urbildstrecke s) beliebig klein gewählt werden kann, und zwar für eine beliebig gegebene topologische Abbildung von B auf s . Übrigens liegen die rektifizierbaren Teilbogen von B dicht auf B : Jeder Teilbogen von B enthält seinerseits einen rektifizierbaren Teilbogen. — Im R_2 ergibt sich hieraus insbesondere: Jede eindeutige, stetige Funktion $x = f(x)$, $a \leq x \leq b$, die jeden ihrer Werte nur endlich oft annimmt, ist in $a \leq x \leq b$ fast überall differenzierbar; durch Abänderung von f auf einer x -Menge von beliebig kleinem Maße kann man aus f eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung erhalten. — Folgende weitere Feststellungen sind für den Beweis wesentlich: Für einen B von endlicher Relativordnung in H ist die Menge S der „singulären“ B.-H.-E. abzählbar, also auch $D = B \cdot S$, sowie das Urbild von D auf s ; dabei heiße eine B.-H.-E. singulär, wenn in hinreichend kleiner (einseitiger) Nachbarschaft von ihr sich nur solche B.-H.-E. vorfinden, deren Höhe größer ist als eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl. Man kann daher aus den H_v derart (höchstens abzählbar viele) „Keile“ ausschneiden, daß außerhalb der Keile eine Summe von Bogen gleichmäßig beschränkter Relativordnungen in den H_v liegt, während die den Keilen angehörigen Teilbogen beliebig kleines Gesamtmaß besitzen und sich durch einfache Streckenzüge von ebenfalls gleichmäßig beschränkten Relativordnungen ersetzen lassen. Diese Ersetzung ist möglich, weil jeder der Keile nur eine (gleichmäßig) beschränkte Anzahl „größter“ Teilbogen von B enthält, d. s. Teilbogen, welche in keinem größeren, ganz im Keil liegenden, Teilbogen enthalten sind.

Haupt (Erlangen).

Algebraische Geometrie:

Krull, Wolfgang: Bemerkungen zur algebraischen Geometrie. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. Abh. **2**, 22—29 (1933).

Es handelt sich um die Auflösung der Singularitäten einer algebraischen Hyperfläche $p = 0$ des affinen oder des projektiven n -dimensionalen Raumes. W. Schneider hat (*Math. Ann.* **81**, 223 und **84**, 303) den Fall nulldimensionaler Singularitäten behandelt; Verf. führt den allgemeinen Fall darauf zurück mit der bekannten idealtheoretischen Methode der Zurückführung von μ -dimensionalen Idealen auf nulldimensionale. Ist (p) das zur Hyperfläche gehörige Hauptideal, so nennt man $c = (p, p_{x_1}, \dots, p_{x_n})$ das Singularitätenideal, alles im Polynombereich $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}_0[x_1, \dots, x_n]$. Ist q ein zu c gehöriges Primärideal und p das zugehörige Primideal, so geht man zum Quotientenring

\mathfrak{P}_p über. Die „Restgruppe“ $\bar{\mathfrak{r}}_p = \mathfrak{P}_p/(p)_p$ und die „Singularitätengruppe“ $\bar{c}_p = \mathfrak{P}_p/c_p$ sind bis auf Isomorphie projektiv-invariant durch (p) definiert. Sind für zwei Primhauptideale die Restgruppen isomorph, so sind die Singularitätengruppen es auch, und man sagt, daß sie längs der Mannigfaltigkeit von p denselben Singularitätentyp haben. Ist nun q speziell eine isolierte Komponente von c , die man als nulldimensional voraussetzen kann, so führt eine Reihe von Transformationen vom Typus

$$x_1 = x'_1; \quad x_i = (c_i + x'_i) x'_i \quad (i = 2, \dots, n)$$

zur Auflösung der Singularität. Die beim ersten, zweiten, ... Schritt entstehenden Singularitätentypen sind projektive Invarianten des gegebenen Singularitätentyps.

van der Waerden (Leipzig).

Petri, K.: Über eine kovariante Kurve. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 1, 49—59 (1933).

Eine ebene Kurve 3. Ordnung $a_x^3 = 0$ besitzt bekanntlich eine kovariante Kurve 3. Klasse $u_\pi^3 = 0$, so beschaffen, daß $a_\pi^2 u_\pi a_x$ für jedes Paar x, u identisch verschwindet; es bedeutet dieses, daß alle ∞^2 Polarkegelschnitte der Kurve $a_x^3 = 0$ mit allen ∞^2 Polarkegelschnitten der Kurve $u_\pi^3 = 0$ apolar sind. Verf. beweist, daß eine Kurve n . Ordnung $a_x^n = 0$ eine ähnliche Kovariante $u_\pi^{3n-6} = 0$ besitzt, so daß $a_\pi^{n-1} u_\pi^{2n-5} a_x \equiv 0$ für jedes Paar x, u . Die Fälle, wo $n = 4, 5, 6$, werden als Beispiele zur Rechnung von $u_\pi^{3n-6} = 0$ besonders diskutiert.

E. G. Togliatti (Genova).

Maroni, A.: Ordine minimo delle serie lineari contenenti parzialmente, senza residuo fisso, una data serie lineare completa di una curva algebrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 265—267 (1933).

L'auteur démontre les deux théorèmes suivants: I. Si une courbe algébrique C contient une g_k^1 complète, il existe sur cette courbe des séries linéaires d'ordre $n + k$ contenant sans résidu fixe une g_r^n complète donnée ($r \geq 1$). II. Pour qu'une série linéaire complète g_r^n ($r \geq 1$) sur une courbe algébrique C soit contenue partiellement sans résidu fixe dans une série linéaire d'ordre $n + k$ (et non d'ordre inférieur), il faut et il suffit que C contienne au moins une g_k^1 (et aucune g_{k-1}^1): la courbe C est dite alors k -gonale, et $m + k$ est l'ordre minimum des séries linéaires contenant sans résidu fixe une série linéaire complète quelconque g_m^r ($s \geq 1$) de la même courbe.

P. Dubreil.

Maroni, A.: Dimensione delle serie lineari di ordine minimo contenenti parzialmente, senza residuo fisso, una data serie lineare completa. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 518—522 (1933).

Etant donnée une série complète g_r^n sur une courbe k -gonale C (v. compte-rendu précédent), l'auteur appelle série minima une série g_{n+k}^r d'ordre minimum et de dimension minima contenant sans résidu fixe la série g_r^n donnée. La dimension de cette série est $r' = r + \alpha - 1$, où α désigne le nombre de conditions imposées à la g_r^n par un groupe de la g_k^1 considérée. Si la courbe C admet plusieurs g_k^1 , on peut répartir les g_{n+k}^r contenant la série g_r^n donnée en groupes de séries correspondant à une même g_k^1 et ayant la même dimension. L'auteur termine par quelques exemples.

P. Dubreil (Lille).

Calapso, R.: Sugli enti proiettivi legati al generico punto di una superficie. Atti Accad. Gioenia Catania 19, mem. 14, 1—6 (1933).

Seien C_1 und C_2 zwei kubische Raumkurven, die im Punkte P einer Fläche Φ je eine asymptotische Linie fünfpunktig berühren. Die Projektionen von C_1 und C_2 vom Punkte P aus bestimmen ein Kegelbüschel. Die Polargeraden der Tangentenebene π von Φ in P in bezug auf die Kegel des Büschels bilden einen Kegel K . Auf Anregung von Marletta zeigt Verf., daß die Greensche Gerade von Φ die Polargerade der Ebene π in bezug auf K ist.

Čech (Brno).

Dubreil, P.: Sur quelques propriétés des variétés algébriques. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1637—1639 (1933).

Verf. bezeichnet mit a_V das homogene Ideal, das erzeugt wird von den Formen $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$, die auf der algebraischen Varietät V verschwinden. Wenn V irreduzibel ist, so ist a_V ein Primideal p_V . Wenn man zwei irreduzible Varietäten V_1, V_2

und ihren Durchschnitt W betrachtet, so ist das Ideal (p_{V_1}, p_{V_2}) im allgemeinen nicht dem Ideale a_W gleich. Verf. zeigt, daß diese Schwierigkeit nicht unüberwindlich ist, sondern eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften gibt. Das Ideal (p_{V_1}, p_{V_2}) unterscheidet sich von a_W durch eine uneigentliche Primärkomponente. Die genannte Schwierigkeit verschwindet mit dieser Komponente. Für ein Ideal der Form (a_V, F) , worin F eine Form ist, hängt die Bedingung für das Verschwinden dieser Komponente nur von V ab. Verf. nennt V eine Varietät erster Art, wenn sie erfüllt ist, im entgegengesetzten Fall eine Varietät zweiter Art. Im ersten Fall genügt jede Form Φ , welche auf dem Durchschnitt von V und $F = 0$ verschwindet, der Identität $\Phi \equiv AF + P$ mit $P \subset a_V$ und umgekehrt. Diese Erweiterung des Noetherschen Theorems ist also gültig und nur gültig, wenn die Varietät V erster Art ist; wenn sie für den Durchschnitt von V und einer besonderen Hyperfläche gilt, so gilt sie für den Durchschnitt von V und einer beliebigen Hyperfläche, die keinen irreduzibeln Teil von V enthält. — Verf. vergleicht seine Resultate mit denen Légaux über Kurven (Thèses, Paris, 1925, letztes Kapitel), auch nennt er einige Eigenschaften der Raumkurven erster Art. Zuletzt gibt er eine Vereinfachung der Lösung des Problems der totalen gemischten Durchschnitte in einem besonderen Fall.

G. Schaake (Groningen).

Severi, Francesco: La teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie algebrica: I. Invarianza del concetto fondamentale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 419—425 (1933).

Severi, Francesco: La teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie algebrica: II. Operazioni sulle serie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 491—497 (1933).

In diesen und nachfolgenden Noten soll die Theorie der Äquivalenzscharen von Punktgruppen auf algebraischen Flächen, die der Autor in 4 früheren Abhandlungen (vgl. dieses Zbl. 5, 176 und 6, 74 und 75 sowie 244) entwickelt hat, neu begründet werden. Die 1. Note bringt eine neue Definition der Äquivalenzschar. Ist F eine Fläche des Raumes S_r , so besteht eine Äquivalenzschar auf F aus den Punktgruppen, die von einer stetigen Familie von M_{r-2} auf F ausgeschnitten werden, vermindert um die Punktgruppen, die von einer anderen ebensolchen Familie ausgeschnitten werden und evtl. noch vermindert um die Punktgruppen einer Äquivalenzschar auf einer festen Kurve von F . Die Invarianz dieses Begriffs bei birationalen Transf. von F wird bewiesen. Die 2. Note behandelt Summen und Differenzen von Äquivalenzscharen und den Begriff der Vollschar. Jede rationale oder unirationale Schar von Punktgruppen auf F ist eine Äquivalenzschar.

van der Waerden (Leipzig).

Roth, L.: Some quartic forms containing planes. Proc. London Math. Soc., II. s. 35, 249—256 (1933).

Untersuchung der rationalen V_3^4 eines 4-dimensionalen Raumes, die 3 Ebenen $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ allgemeiner Lage enthält [diese V_3^4 ist schon bekannt: s. F. D'Amico, Atti Accad. Gioenia Catania (4) 18 (1906); C. Segre, Encykl. d. math. Wiss., III C 7, ⁶⁰³]. Verf. studiert auch die V_3^4 mit 4, 5, 6 Ebenen, und gibt in jedem Falle die eindeutige Darstellung der V_3^4 auf einem S_3 (diese erhält man am einfachsten durch die Geraden, die $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ treffen und aus den einzelnen Punkten der V_3^4 ausgehen). Schließlich der Beweis, daß V_3^4 nicht mehr als 6 Ebenen enthalten kann; diese haben im S_4 eine besondere Lage, da sie eine ganze Regelschar von Treffergeraden besitzen. Togliatti.

Godeaux, Lucien: Sur les quadriques de Moutard. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 100—104 (1933).

Les quadriques osculatrices à une surface en un point P ordinaire de celle-ci, forment un système homaloïdal. La transformation obtenue en rapportant projectivement les quadriques de ce système aux plans de l'espace, fait correspondre aux quadriques de Moutard relatives à P , les plans tangents à une surface cubique le long d'une des ses sections planes, et conduit à une très simple démonstration du théorème de Moutard sur les dites quadriques. Beniamino Segre (Bologna).

Bolus, F.: Sur un espace double rationnel. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 126—127 (1933).

Si un espace double possède une surface de diramation du quatrième ordre, touchant un plan suivant une conique et ayant un point double n'appartenant pas à cette conique, cet espace double est rationnel. *Autoreferat.*

Differentialgeometrie:

Godeau, R.: Sur les surfaces gauches. Mathesis 47, 170—173 (1933).

Dop, A. van: Sur une classe de congruences de droites. J. Math. pures appl., IX. s. 12, 205—218 (1933).

Eine auf die Fokalnetze bezogene Geradenkongruenz (xy) im n -dimensionalen Raume S_n kann bekanntlich durch $n+1$ Lösungen x_i, y_i des Systems $x_0 = ay, y_0 = bx$ festgelegt werden. Tzitzéica hatte [J. Math. pures appl., IX. s. 7, 189—208 (1928)] den Fall $a = b$ untersucht; er führte dort u. a. eine Transformation Γ der betreffenden Kongruenzen ein, für die er einen Permutabilitätssatz aufstellte. Verf. untersucht analog den Fall $a_u = b_v$. Auch hier hat man die Transformation Γ und den analogen Permutabilitätssatz. Bemerkenswert ist der Fall, wo die Kongruenz auf einer quadratischen Hyperfläche Φ des S_5 liegt. Deutet man Φ als den Raum der Geraden eines S_3 , so entsprechen diesen Kongruenzen die Tzitzéica-Desmoulinschen R -Flächen (in dem von Tzitzéica untersuchten Fall erscheinen statt der R -Flächen die Fubinischen isotherm-asymptotischen Flächen). Die Transformation Γ sind in dem Falle der R -Flächen die Jonasschen W -Transformationen; im Falle der isotherm-asymptotischen Flächen sind es die Fubinischen W -Transformationen. *Čech (Brno).*

Godeaux, Lucien: Sur quelques relations concernant les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2, 74—78 (1933).

Les deux tangentes asymptotiques d'une surface Σ dans S_3 ont pour image dans S_5 représentant les droites de S_3 deux points U, V qui sont consécutifs dans une suite de Laplace ... $U_1 U V V_1 V_2 \dots$. Pour les surfaces désignées au titre la suite en question possède la particularité, à savoir: chaque point V_n appartient au plan ($V_{n+4}, V_{n+5}, V_{n+6}$). L'auteur démontre ce théorème (donné par lui-même en 1929. Bull. Soc. Math. France 57, 41) par la voie analytique. *S. Finikoff (Moscou).*

Masotti, A.: Sulle trasversali di un sistema isoterma. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 523—525 (1933).

Die Linien $v = \text{konst.}$ sind auf einer Fläche längs des Systems

$$(1) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} du + \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} dv = 0$$

parallel im Sinne von Levi-Civita. Wenn $v = \text{konst.}$ zusammen mit $u = \text{konst.}$ ein isothermisches System bilden [mit $ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2)$], so ist (1) die Differentialgleichung des Systems, welches zu $\lambda = \text{konst.}$ orthogonal ist. Längs (1) sind dann $u = \text{konst.}$ resp. $v = \text{konst.}$ parallel im Sinne von Levi-Civita. Kurze Anwendung auf Torsen. *Hlavatý (Praha).*

Doubnoff, J.: Sur les tenseurs à divergence unique. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 507—508 (1933).

Die Tensoren t^{ij} eines n -dimensionellen Riemannschen Raumes mit einziger Divergenz sind durch die Gleichung $(t^{ij} - t^{ji})/i = 0$ gekennzeichnet. Verf. findet die allgemeine Lösung $t^{ij} = s^{ij} + \chi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-3} \alpha_{n-2}} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} ij}$, wo s^{ij} ein beliebiger symmetrischer Tensor ist, und $\chi_{i_1 i_2 \dots i_{n-3}}$ ein beliebiger Multivektor $n-3$ -ter Ordnung. Der Fall $n = 2, 3$ wurde von U. Cisotti [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. 15, 835 (1932); dies. Zbl. 5, 181] behandelt. *R. Mattioli (Padova).*

Haimovici, M.: Sopra una interpretazione meccanica del parallelismo di Levi-Civita. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 541—546 (1933).

Consider a Riemannian space V_n immersed in a Euclidean space S_m , and let s_n be the Euclidean space touching V_n at a point P which can move arbitrarily in V_n . Consider further a rigid material system in s_n , called for brevity "the system P ", con-

sisting of n pairs of particles of unit mass, each pair being symmetrically situated on one of the axes of a rectangular system having P as origin; and suppose that the system moves under the influence of a single force applied at P . Then the Lagrangian equations of motion lead to the conclusion that every point which is fixed relative to the system P moves with constant velocity with respect to a system of reference of origin P which is displaced by Levi-Civita parallel transport. And, if initially a point M has zero velocity, the vector PM undergoes Levi-Civita parallel transport during the whole motion; and so on. Such considerations hold also for systems consisting of any number of rigidly corrected systems P , and hence also for a spherically symmetric homogeneous rigid body. H. S. Ruse (Edinburgh).

Conforto, Fabio: Sopra il calcolo differenziale assoluto negli spazi funzionali continui. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 309—324 (1933).

Verf. behandelt einige neue Verallgemeinerungen des absoluten Differentialkalküls im Gebiete der funktionellen Mannigfaltigkeiten im Sinne Volterras. Alle Werte, die eine stetige Funktion y^x im Intervall $0 \leq x \leq 1$ annimmt, werden als die Koordinaten eines Punktes dieser Mannigfaltigkeit betrachtet. Die Koordinatentransformationen werden Funktionalen $y^x = y^x[y^t]$, für welche die Stetigkeit und das Differential im Sinne Fréchet bestimmt wird. Die Metrik des Funktionalraums wird durch

$$ds^2 = \int_0^1 [\delta y(\xi)]^2 d\xi + \int_0^1 \int_0^1 a[y(x), \xi_1, \xi_2] \delta y(\xi_1) \delta y(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

oder in abgekürzter Form, durch

$$ds^2 = [a_{\xi_1 \xi_2} [y^x] + \delta(\xi_1, \xi_2)] \delta y^{\xi_1} \delta y^{\xi_2}$$

ausgedrückt. Vom Begriffe des Differentials läßt sich eine Operation ableiten, die den formellen Charakter der partiellen Ableitung hat; so gelangt man zu einer unmittelbaren Verallgemeinerung der ko-kontrovariantischen Transformationen. Aus Levi-Civitas Parallelismus folgen dann die Gleichungen (integrodifferential) der geodätischen Linien. Im gleichen Sinne werden auch die Christoffelschen Symbole und der Riemannsche Tensor bestimmt. Im zweiten Teile der Arbeit erstreckt der Verf. den Begriff der affinen Übertragung auf diesen Funktionalraum. R. Mattioli (Padova).

Mechanik.

Markoff, A.: Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizität. Math. Z. 36, 708—738 (1933).

Es werden Bewegungen, d. h. Lösungen des Systems $\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ betrachtet (X_i sind in einem Gebiete G von E_n definiert und stetig und erfüllen die Lipschitz-Bedingung). Für das Folgende braucht man aber nur folgende drei Eigenschaften der Bewegungen $x = f(t)$, $x \in G$: 1. ist $y \in G$, $v \in E_1$, so gibt es eine und nur eine der Bedingung $y = f(v)$ genügende Bewegung $f(t) \equiv f_{vy}(t)$; 2. $f_{vy}(v + t) = f_{wy}(w + t)$; 3. Stetigkeit in bezug auf x und t . § 1 enthält eine Begründung bekannter Tatsachen (Birkhoff, Dynamical Systems; Franklin, Math. Z. 30, 325—331), die sich auf diese Eigenschaften stützt, sowie einige Definitionen. Die Punktmenge von G , $\{f(t)\}$, $t \geq w$, heißt eine positive Halbbahn, $\text{Orb}_w^+ f$ (analog wird die negative Halbbahn bzw. die Bahn definiert). Die Halbbahn ist im elementaren Sinne positiv stabil, wenn $\overline{\text{Orb}_w^+ f}$ beschränkt und $\subset G$ ist. § 2 enthält einen Hilfssatz über „reichlich verteilte“ Zahlenmengen. § 3. Die Bewegung $f(t)$ ist fastperiodisch, wenn sie beiderseits stabil ist und η -Verschiebungszahlen ($\eta > 0$) von der Beschaffenheit: $\varrho\{f(t), f(t+v)\} < \eta$ besitzt, die reichlich verteilt sind. Die Bewegung hat die Eigenschaft S^+ , wenn sie negativ stabil ist, und wenn es für jedes $\eta > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, daß aus $\varrho\{f(w_1), f(w_2)\} < \delta$ die Ungleichung $\varrho\{f(w_1+t), f(w_2+t)\} < \eta$ für $t \geq 0$ folgt. Satz I.: Die Eigenschaft S^+ (auch S^-) ist charakteristisch für fastperiodische Bewegungen. [Ver-

schärfung eines Satzes von Franklin, l. c., und von Verf., C. R. 189, 732 (1929).] § 4. Der Punkt $x \in G$ ist im Liapounoffschen Sinne in bezug auf die Menge $B \subset G$ positiv stabil (L_B^+ -stabil), wenn aus $y \in B$, $\varrho(x, y) < \delta$ die Ungleichung $\varrho\{x(t), y(t)\} < \varepsilon$ für $t \geq 0$ folgt. § 5. Eine Menge ist stationär, wenn sie Vereinigungsmenge von Bahnen ist. Wenn B stationär ist, so ist die Menge aller L_B^+ -stabiler Punkte stationär; in diesem Falle, wenn ein Punkt von Orb f L_B^+ -stabil ist, heißt die Bewegung f L_B^+ -stabil. § 6. Hauptsatz. Sind in einer beschränkten abgeschlossenen stationären Menge $F \subset G$ alle Bewegungen L_F^+ -stabil, so sind sie fastperiodisch und auch L_F^- -stabil. § 7. Satz IV. Eine rekurrente Bewegung, die in bezug auf ihre eigene Bahn L^+ -stabil ist, ist fastperiodisch; Umkehrung dieses Satzes. *W. Stepanoff* (Moskau).

Levi-Civita, T.: Ergänzende Bemerkung zum Weierstraßschen Vorbereitungssatz und bedingt-periodische Bewegungen. Z. angew. Math. Mech. 13, 112—114 (1933).

In gewissen Fällen kann die Lösung eines mechanischen Problems (H analytisch)

in expliziter Form
$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$p_i = \varphi_i(c_1, \dots, c_n; w_1, \dots, w_n), \quad q_i = \psi_i(c_1, \dots, c_n; w_1, \dots, w_n)$

gefunden werden, wo w_i Winkelvariable bedeuten und

$$w_h = a_h t + b_h$$

ist (a_h sind Funktionen der c_i). Es ist manchmal noch die Meinung verbreitet, daß jedes mechanische System eine derartige Lösung zuläßt. Mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Vorbereitungssatzes wird indessen versucht, zu zeigen, daß die Lösbarkeit durch Winkelvariable die Existenz von n eindeutigen Integralrelationen bedingt.

E. Hopf (Watertown).

Lampariello, Giovanni: Sur la nature analytique des solutions des systèmes canoniques intégrables par quadratures. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1207—1209 (1933).

Vorläufige Mitteilung über eine inzwischen erschienene Untersuchung des Verf. [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 74—78 (1933); dies. Zbl. 6, 372].

Wintner (Baltimore).

Boggio, T.: Sulle equazioni della dinamica dei sistemi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 452—460 (1933).

L'autore applica i metodi delle omografie vettoriali alla deduzione delle equazioni dinamiche di Lagrange (1^a e 2^a forma), di Hamilton e alla ricerca dell' integrale assegnato da Painlevé, più generale di quello delle forze vive. *R. Marcolongo*.

Belorizky, David: Sur l'intégration du problème des deux corps. Bull. Sci. math., II. s. 57, 45—49 (1933).

Transformiert man die kanonischen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial y}, \\ F &= \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{\mu}{r} = h \end{aligned}$$

für das Zweikörperproblem durch $x + iy = (X + iY)^2$ und führt für t den regularisierenden Parameter θ durch
$$\frac{d\theta}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{d\theta}{X^2 + Y^2}$$

ein (θ ist bekanntlich im Falle der elliptischen Bewegung ($h < 0$) der exzentrischen Anomalie proportional und im Falle $h = 0$ proportional $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$, wobei ω die wahre Anomalie ist), so gehen die Bewegungsgleichungen über in die einfachen Gleichungen:

$$\frac{d^2 X}{d\theta^2} = \frac{h}{2} X, \quad \frac{d^2 Y}{d\theta^2} = \frac{h}{2} Y. \quad \text{Wegner (Darmstadt).}$$

Glenn, Oliver E.: The mechanics of the stability of a central orbit. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 297—308 (1933).

Es wird ein Formalismus entwickelt, durch den es möglich ist, vorübergehend gestörte Zentralbahnen C' eines Massenpunktes durch Transformation überzuführen in eine geeignet gewählte Kurve C . Die Transformationen werden interpolatorisch gewonnen. *A. Klose (Berlin).*

Wilkens, A.: Über das Problem der mehrfachen Kommensurabilitäten im Sonnensystem. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 1, 71—101 (1933).

Bei mehrfach-periodischen Lösungen des Vierkörperproblems treten besondere Integrationsschwierigkeiten auf. Die im Sonnensystem bekannten Fälle (n reziproke Umlaufzeit) sind A: Jupiter—Satellit I—Satellit II—Satellit III, wo $N = n_I - 3n_{II} + 2n_{III} = 0$. B: Sonne — Uranus — Neptun — Pluto, wo $N = n_U - 4n_N + 3n_P = 0$. Es wird untersucht, ob ähnliche Bewegungstypen in Systemen der Form C: Sonne — Planetoid — Jupiter — Saturn; D: Sonne — Mars — Planetoid — Jupiter vorkommen. Eingehend behandelt wird der Typus C für den Fall, daß zwischen den Umlaufzeiten dieselbe Beziehung wie bei A besteht. Die Differentialgleichung des kritischen Winkelargumentes wird in der vereinfachten Form $d^2K/dt^2 = c \sin K + e \sin(\alpha t + \beta)$ benutzt (c, e, α, β Konstante). Die näherungsweise Integration wird durchgeführt außer für einige Spezialfälle für den Fall kleiner Schwingungen des Argumentes K um einen Mittelwert. Die Librationsbedingungen sind in Gleichung (10a) zusammengestellt. Die Konstanten werden unter Benützung von Leverriers Entwicklungen der Störungsfunktion berechnet. Der Untersuchung ist angefügt ein Verzeichnis von 69 Kleinen Planeten, die dem Bewegungstypus C zugezählt werden können. *A. Klose (Berlin).*

Price, G. Baley: On the Strömgren-Wintner natural termination principle. Amer. J. Math. 55, 303—308 (1933).

Unter Benützung der bereits in seiner früheren Arbeit [Amer. J. Math. 54 (1932); dies. Zbl. 5, 417] verwendeten integrierbaren Modelle gibt der Verf. eine elegante elementare Illustration diesmal des Strömgrenschen Abschlußprinzips derart, daß man das Zustandekommen des natürlichen Abschlusses periodischer Lösungsscharen formelmäßig verfolgen kann [wegen der mathematischen Begründung des Strömgrenschen Abschlußprinzips sowie wegen Literatur vgl. die Arbeiten des Ref. in Math. Z. 34 (1931); dies. Zbl. 3, 133]. Es werden sodann aus dem Verhalten der speziellen Modelle des Verf. verschiedene prinzipielle Folgerungen gezogen, wobei es sich um folgendes handelt. Strömgren hat gezeigt, daß der Poincarésche Verzweigungssatz gerade für Gruppen des restringierten Dreikörperproblems, für welche der Satz von Poincaré im dritten Band der Méth. Nouv. in Anspruch genommen wurde, dynamisch inhaltslos ist, und der Ref. hat loc. cit. bemerkt, daß in dem Poincaréschen Beweis das Nichtauftreten wesentlicher Singularitäten und dergleichen mehr als selbstverständlich betrachtet wird, ferner, daß von einer Verzweigung oder Verschmelzung höchstens dann die Rede sein kann, wenn — wie bei der Abzweigung der Jacobischen Ellipsoide von den Maclaurinschen — mindestens drei Scharen in einer Bahn zusammenkommen; endlich hat der Ref. [Amer. J. Math. 53 (1931); dies. Zbl. 2, 210] hervorgehoben, daß der Satz über Stabilitätsaustausch in der Poincaréschen Fassung bereits durch das von den Mondbahnen ausgehende periodische Kontinuum (group g) widerlegt wird. Der Verf. findet nun, daß bei seinen elementaren Modellen alle diese Erscheinungen nicht auftreten, so daß die Poincaréschen Resultate unter Umständen richtig sein können. Wann sie richtig sind und wann nicht, ist freilich eine schwierige Frage. Zum Schluß gibt der Verf. ein explizites Beispiel an, bei welchem die Energiekonstante bei unbegrenzter analytischer Fortsetzung nicht die ganze reelle Achse durchläuft (dies ist der Fall auch bei Strömgrens geschlossenen Gruppen und möglicherweise auch bei durch Gleichgewichtslagen bedingten Abschlüssen).

Wintner (Baltimore).

Wavre, Rolin: *L'aspect analytique du problème des figures planétaires.* (Zürich, *Sitzg. v. 5.—12. IX. 1932.*) Verh. internat. Math.-Kongr. 1, 240—248 (1932).

Bericht über die neueren Entwicklungen auf dem Gebiete der Gleichgewichtsfiguren, vor allem über die Untersuchungen des Verf. und von Lichtenstein sowie ihrer Mitarbeiter.

Wintner (Baltimore).

Finzi, B.: *Equazioni intrinseche della meccanica dei sistemi continui perfettamente od imperfettamente flessibili.* Ann. Mat. pura appl., IV. s. 11, 215—245 (1933).

I sistemi continui perfettamente flessibili (fili, membrane, ecc.) sono tali che la sollecitazione è caratterizzata da un unico tensore appartenente alla stessa varietà di cui fa parte il sistema: e sono regolati da leggi geometriche e meccaniche esprimibili in forma intrinseca o assoluta, indipendenti cioè da qualsiasi sistema di riferimento. — Sebbene tale caratterizzazione non valga più per quei sistemi (verghe, lastre, ecc.) dall' A. chiamati imperfettamente flessibili e considerati nel modo più generale in una qualunque varietà V_n , egli si propone di far vedere che le leggi geometriche e meccaniche che regolano p. e. l'equilibrio sono del pari esprimibili sotto forma intrinseca; istituendo altresì un calcolo appropriato per la loro deduzione. Precisamente l'A. passa dai tensori di una V_n a quelli di una V_m immersi nella prima e istituisce un calcolo differenziale assoluto, valendosi promiscuamente di metodi classici e di quelli delle omografie vettoriali, che opera su certi insiemi di tensori di V_n rappresentanti quelli di V_m . A stabilire i fondamenti e gli sviluppi di un tale calcolo è dedicata la prima parte della memoria. — Lo studio si inizia con quello degli insiemi tensoriali (covarianti, contravarianti e misti) di prima classe, insiemi di tensori di V_n costituenti tensori di V_{n+1} ; delle loro operazioni algebriche, della loro derivazione e colla importante considerazione dei noti e più comuni operatori differenziali-gradiente, rotore, divergenza. L'A. può quindi estendere le sue ricerche agli insiemi di 2^a e 3^a ... classe, insiemi di V_n costituenti tensori di V_{n+2} , V_{n+3} , ... — Nella seconda parte tali considerazioni generali sono applicate alla rapida deduzione, sotto forma assoluta, delle equazioni statiche delle verghe e membrane, lastre.

Marcolongo (Napoli).

Astronomie und Astrophysik.

Möller, Jens P.: *Ein Nomogramm für die Übertragung ekliptikaler Elemente auf das Äquinoktium des vorhergehenden oder des folgenden Jahres.* Astron. Nachr. 249, 63—64 (1933).

Seonzo, Pasquale: *Espressione dell'anomalia vera in funzione dell'anomalia media.* Mem. Soc. astron. Ital., N. s. 7, 59—66 (1933).

Sviluppo in serie di Fourier la differenza $\omega - \zeta$ tra anomalia vera e media nel caso di un'orbita ellittica kepleriana, ritrovando con un procedimento diretto e senza ricorrere quindi allo sviluppo di speciali teorie una nota formola di Tisserand.

Autoreferat.

Gialanella, Lucio: *Sulla determinazione delle orbite di stelle doppie spettroscopiche.* Mem. Soc. astron. Ital., N. s. 7, 85—104 (1933).

L'A., partendo dalle memorie classiche di Lehmann-Filhès, Zurhellen e Schwarzschild, studia ed esamina i metodi per il calcolo delle orbite delle stelle doppie spettroscopiche. Considera partitamente i due casi che le osservazioni forniscano le velocità radiali di entrambe le componenti del sistema binario oppure di una sola stella; nel primo caso considera il moto relativo di una componente rispetto all'altra, mentre nel secondo riferisce il moto al baricentro del sistema, del quale è stata preventivamente calcolata la velocità costante di spostamento rettilineo. Applicherà i metodi e le formule ottenute al calcolo effettivo delle orbite delle due doppie spettroscopiche τ Persei e ρ Telescopii.

Autoreferat.

Kaburaki, Masaki: *On the motion of the local system as viewed from that of moving clusters, nearer stars and high velocity stars.* Jap. J. Astron. Geophys. 10, 313 bis 367 (1933).

Bottlinger, K. F.: Beiträge zur Theorie der Rotation des Sternsystems. Veröff. Univ.-Sternw. Berlin-Babelsberg 10, H. 2, 1—38 (1933).

Der Effekt der differentiellen Rotation wird unter Annahme eines Anziehungsgesetzes der Form $F = \frac{aR}{1 + bR^3}$ für beliebige Entfernungen vom Beobachter berechnet und dargestellt. Das Ergebnis findet auf Planetarische Nebel und offene Sternhaufen Anwendung, bei denen die Entfernungen so groß sind, daß die genäherte Oortsche Formel nicht mehr ausreicht. — Der empirische Kraftansatz wird genauer untersucht und eine allgemeine Diskussion über die Geschwindigkeitsstreuung in der Hauptebene und senkrecht dazu und über die Asymmetrie im Anschluß an die Lindblad-Oortsche Rotationstheorie durchgeführt. Als Lindbladsche Untersysteme werden folgende Gruppen aufgefaßt: I. mit der größten Abplattung und schnellsten Rotation enthält die *O*-, *B*-, *c*-Sterne, diffusen Nebel, Kalziumwolken und offenen Sternhaufen; II. enthält die große Masse der Sterne, Geschwindigkeitsstreuung und Abstand von der Symmetrieebene sind 4—5mal größer als bei I.; III. wird gebildet von den Schnellläufern und Kugelhaufen. — Im Anhang ist noch ein graphisches Verfahren zur Ermittlung der extremen Bahnradialen bei dem obigen Kraftgesetz wiedergegeben.

Siedentopf (Jena).

Zagar, F.: Sull'aumento di massa di un pianeta per effetto di pulviscolo cosmico. I. Premesse e caso particolare. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 627—632 (1932).

Zagar, F.: Sull'aumento di massa di un pianeta per effetto di pulviscolo cosmico. II. Caso generale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 88—92 (1933).

Der Verf. diskutiert eine Erweiterung des Levi-Civitaschen Ansatzes [Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei 83 (1930); Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 13, (1930)] betreffend die Massenveränderung sich in inkohärenten Medien bewegender Planeten.

Wintner (Baltimore).

Zagar, F.: Sugli effetti secolari di un mezzo resistente sulla rotazione della terra e sul valore attuale della obliquità dell'eclittica. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei 86, 59—76 (1933).

Die Arbeit behandelt den Einfluß eines widerstehenden Mediums auf die Rotation der Erde. Eine Diskussion der Bewegungsgleichungen zeigt, daß die unmittelbare Störung bei plausiblen Annahmen über das Medium vernachlässigbar ist, daß es aber auch einen indirekten Effekt gibt, der die Präzession merkbar beschleunigt, die Schiefe etwas verringert und auf die Drehgeschwindigkeit eine bremsende Wirkung ausübt.

Wintner (Baltimore).

Tiercy, Georges: Sur le „lag“ des céphéides et le rôle du coefficient *k* d'absorption. Arch. Sci. Physiques etc. 15, 127—142 (1933).

Eddington, A. S.: Upper limits to the density and temperature in a star. II. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 93, 320—324 (1933).

This is a generalisation of paper I [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 91, 444 (1931); isth Zbl. 2, 99] to take account of relativistic degeneracy of stellar material. Let ϱ_0 be the greatest density in a star of mass *M*. The author shows that the pressure at any point cannot exceed $P_{\max} = B \varrho_0^{4/3}$, where *B* is a certain constant. He then defines $P_{\min} = F(\varrho_0)$, where *F*(ϱ) is the minimum pressure for stellar material of given density ϱ , and the author uses numerical values for *F*(ϱ) calculated by E. C. Stoner [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 92, 662 (1932); this Zbl. 5, 328]. He plots the curves for P_{\max} , P_{\min} as functions of ϱ_0 , and obtains a region in which (ϱ_0, P_0) , giving the actual value of the pressure corresponding to ϱ_0 , must lie. The curves intersect for values of *M* below a critical value, depending on the molecular weight, and so for these values of *M* they give upper limits to the density and pressure in the star. The author shows that the argument is unaffected if the curves intersect in a further point. Numerical examples are given.

W. H. McCrea (London).

Chandrasekhar, S.: The equilibrium of distorted polytropes. I. The rotational problem. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **93**, 390—405 (1933).

If a sphere of gas is in gravitational equilibrium, and the total pressure P and density ρ are such that $P = K\rho^{1+1/n}$, then the density distribution is given by the solution of Emden's differential equation of index n . The author now considers the problem of finding the shape and density distribution when such a sphere is set rotating with constant small angular velocity ω . He derives from the conditions of gravitational equilibrium the equation

$$\frac{1}{\xi^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \Theta}{\partial \mu} \right) = -\Theta^n + v,$$

where Θ^n , ξ , v are certain constant multiples of ρ , r , ω^2 , respectively, and r , $\text{arc cos } \mu$ are polar coordinates referred to the centre of the system. For a non-rotating system we have the Emden equation

$$\frac{1}{\xi^3} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n.$$

The author seeks a solution valid to the first order in v of the form $\Theta = \theta + v\Psi$. He assumes an appropriate expansion for Ψ , in which he determines the coefficients by the condition that the original equations of gravitational equilibrium should be satisfied. He obtains finally

$$\Psi = \psi_0(\xi) - \frac{5}{6} \frac{\xi_1^2}{3\psi_2(\xi_1) + \xi_1\psi_2'(\xi_1)} \psi_2(\xi) P_2(\mu),$$

where ξ_1 is suitably defined, and where ψ_0 , ψ_2 satisfy the differential equations

$$\frac{1}{\xi^3} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi_0}{d\xi} \right) = -n\theta^{n-1}\psi_0 + 1; \quad \frac{1}{\xi^3} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi_2}{d\xi} \right) = \left(-n\theta^{n-1} + \frac{6}{\xi^2} \right) \psi_2.$$

In an appendix he tabulates the numerical solutions of these equations for $n = 1, 1.5, 2, 3, 4$. Explicit expressions for the oblateness, mass, and volume are given. In particular it is shown that for configurations of equal mass, the central density is greater than that for $\omega = 0$, if $n > 3$, and is less if $n < 3$. The astronomical bearing of the work is briefly discussed. *W. H. McCrea* (London).

Siedentopf, H.: Konvektion in Sternatmosphären. II. Eine allgemeine Konvektionsbedingung. Astron. Nachr. **249**, 53—64 (1933).

In continuation of his previous work [Astron. Nachr. **244**, 273 (1932); this Zbl. **6**, 37] the author investigates the general conditions for the appearance of convection at any level in a star which, as a whole, is in radiative equilibrium. He studies the effects of radiation pressure and its gradient, the distribution of energy sources, the equation of state of the stellar material, the degree of ionisation and the energy of ionisation, the chemical constitution (mixture of elements), and of rotation. His conclusions are given in detail. They indicate briefly that convection is favoured by high radiation pressure and a high gradient of this pressure, by over-compressibility of the material, by ionisation, especially first stage ionisation at low temperature and pressures as in late type giant stars, or the envelopes of planetary nebulae. It is favoured by rotation if the angular velocity decreases sufficiently rapidly towards the outside. *McCrea*.

Flügge, Siegfried: Der Einfluß der Neutronen auf den inneren Aufbau der Sterne. Z. Astrophys. **6**, 272—292 (1933).

On account of their long free paths the coefficient of conductivity of neutrons in a gas is very much greater than that of the gas itself. The author evaluates the ratio of the conduction energy flux to the radiation flux in a stellar interior. He finds that under the conditions of stellar material contemplated in Eddington's and similar theories, and for not too high temperatures, this ratio is of the order of unity for an admixture of a few percent (in particle numbers) of neutrons. He considers that the dissociation of a neutron into a proton and electron is possible only in an atomic nucleus. He then calculates the density distribution of neutrons in a star, taking account of

the fact that they are not subject to radiation pressure. The neutron concentration may increase or decrease inwards, or possess a minimum, in a manner depending on the mean molecular weight of the stellar matter. A numerical example is worked out to show the density and temperature distribution in a star with and without a neutron content. The author suggests that a source of stellar energy may be found in the building up of atomic nuclei by the capture of neutrons with the transformation of the resulting mass defect into radiation. He gives some relevant data concerning mass defects, and points out that in contrast to Atkinson's theory of proton capture, neutron capture is possible by nuclei of arbitrarily large mass. *W. H. McCrea* (London).

Perepelkin, E. J.: Über die Struktur der Sonnenschwärmephäre. *Z. Astrophys.* **6**, 245—258 (1933).

Die Chromosphäre wird gedeutet als eine große Ansammlung von Protuberanzen verschiedener Höhe und Helligkeit, die willkürlich über die Sonnenoberfläche verteilt sind. Nach statistischen Methoden kann man aus dieser Vorstellung heraus eine exponentielle Intensitätsabnahme mit der Höhe in der Chromosphäre ableiten, deren Konstanten sich aus den beobachteten Schwankungen der Chromosphärenhöhe ermitteln lassen und in guter Übereinstimmung mit dem von Pannekoek und Minnaert gemessenen Intensitätsabfall sind. Auch einige weitere Folgerungen hinsichtlich der Feinstruktur der H_α -Spektroheliogramme und der mittleren Geschwindigkeiten der Filamente werden durch die Beobachtung bestätigt. *Siedentopf* (Jena).

Quantentheorie.

Lees, A.: The conservation of probability and energy as criteria for the validity of wave equations. *Philos. Mag.*, VII. s. **15**, 1133—1142 (1933).

Bei einer statistischen Ortsdichte $\rho = |\psi|^2$ (wobei ψ quantenmechanische Wellenfunktion ist) muß eine die „Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit“ ausdrückende Kontinuitätsgleichung $\text{div } \sigma + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ gelten und eine die Energieerhaltung ausdrückende Bedingung, die, wenn der Energieoperator H die Zeit t nicht explizit enthält, durch $\frac{d}{dt} \int \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \psi} d\tau = 0$ gegeben ist. Der Verf. stellt in Vervollständigung bekannter Resultate fest, daß beide Bedingungen von der nichtrelativistischen Schrödingergleichung und von der relativistischen Diracgleichung, aber nicht von der relativistischen Wellengleichung zweiter Ordnung erfüllt werden. — Dabei kommt jedoch nicht zum Ausdruck, daß letzteres Nichterfülltsein seine Wurzel darin hat, daß im letzteren Falle beide Bedingungen eine etwas andere Gestalt annehmen. *Jordan*.

Joos, Georg: Linienspektren der Atome. I. Physik regeln. *Ber.* **1**, 81—100 (1933).

Heitler, W.: Bemerkung über die Linienform bei Anregung durch Elektronenstoß. *Z. Physik.* **82**, 146—150 (1933).

In Analogie zu einer Rechnung von Weisskopf [*Ann. Physik* **9**, 23 (1931); *dis. Zbl.* **1**, 376] für die Resonanzfluoreszenz bei Anregung mit einer Linie von geringerer Linienbreite als die natürliche Linienbreite der Absorptionslinie wird vom Verf. die Form der Emissionslinie für den Fall ungestörter Ausstrahlung bei Anregung durch Elektronenstoß mit Elektronen eines gegen die natürliche Linienbreite sehr kleinen Energieintervalls berechnet. Wie bei Lichtanregung ergibt sich auch hier — als Folge der individuellen Gültigkeit des Energiesatzes —, daß die Emissionslinie auf ihrer kurzwelligen Seite scharf mit der maximalen im anregenden Bündel vorhandenen Elektronenenergie zusammenfällt. Nach der Seite der langen Wellen zeigt die Emissionslinie unter den genannten Anregungsbedingungen einen langsameren Abfall, als der natürlichen Linienform entsprechen würde, was eine Folge des höheren Dichtefaktors $\sqrt{E_0}$ für die dem Elektron nach dem Stoß verbleibende Energie E_0 ist. Bei Anregung mit Elektronenenergien, deren Differenz gegen die Energie der Linienmitte groß gegen

die natürliche Halbwertsbreite ist, sowie durch Überlagerung der Anregung mit Elektronen eines Energieintervalls, das groß gegen die natürliche Linienbreite ist, ergibt sich hingegen die natürliche Linienform für die Emissionslinie. Das gleiche gilt, wenn die Phasen der emittierenden Atome durch Zusammenstöße gestört werden. *Houtermans*.

Neugebauer, Th.: Zur Theorie des Kerreffektes zweiatomiger Molekeln. Z. Physik 82, 660—673 (1933).

Bei der Behandlung des Kerreffekts nach der klassischen Theorie (Langevin-Born-Gans) und nach der Quantenmechanik ergeben sich voneinander abweichende Formeln. Im Falle von zweiatomigen Molekeln gelingt es dem Verf., die nach der Quantenmechanik auftretenden zusätzlichen Glieder durch passende Umformung abzuschätzen. Diese sind bei normalen Temperaturen und für die Frequenzen des sichtbaren Lichts, mit denen gewöhnlich beobachtet wird, etwa 100mal so klein als die übrigen Glieder, die den klassischen entsprechen. Die klassische und die quantenmechanische Formel sind also durchaus äquivalent und die aus Messungen nach der klassischen Formel berechneten Polarisierbarkeiten auch nach der Quantenmechanik richtig.

B. Mrowka (Königsberg i. Pr.).

● **Handbuch der Radiologie.** Hrsg. v. Erich Marx. Bd. 6. **Quantenmechanik der Materie und Strahlung.** (2. Aufl. d. Theorien der Radiologie.) Tl. 1. **Atome und Elektronen.** Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1933. X, 466 S., 1 Ausschlagn. u. 91 Fig. RM. 41.—.

Bloch, F.: Die Elektronentheorie der Metalle. S. 226—278 u. 6 Fig.

Zusammenfassende Übersicht über den jetzigen Stand der Theorie der Leitfähigkeit der Metalle und sich daran anschließende Probleme. Die einzelnen Abschnitte behandeln: Quantentheoretische Grundvorstellungen der Elektronentheorie; direkte Folgerungen aus ihnen (Emissionserscheinungen, Verhalten gegenüber Lichtschwingungen, Unterschied zwischen Leitern und Isolatoren); Theorie der Leitfähigkeit.

Nordheim (Göttingen).

Wigner, E., and F. Seitz: On the constitution of metallic sodium. Physic. Rev., II. s. 43, 804—810 (1933).

Es wird eine Berechnung der Ladungs- bzw. Potentialverteilung in metallischem Natrium gegeben. Dazu wird angenommen, daß angenähert um jedes Ion eine kugelsymmetrische Verteilung besteht, die auf der Oberfläche einer Kugel vom Inhalt einer Elementarzelle verschwindet (als Ersatz für die verwickelteren wirklichen Randbedingungen), und die nach einer numerischen Methode als Funktion der Gitterkonstante bestimmt wird. Unter Hinzunahme der Fermischen Nullpunktsenergie der Elektronen lassen sich Gitterkonstante, Bindungsenergie und Kompressibilität berechnen. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung ist sehr gut, wohl als Resultat der Kompensation verschiedener Vernachlässigungen.

Nordheim (Göttingen).

Dorfman, J.: Bemerkungen zur Theorie der Supraleitfähigkeit. Physik. Z. Sowjetunion 3, 366—380 (1933).

Es werden einige energetische Betrachtungen zur Supraleitung angestellt, indem angenommen wird, daß sie auf einer Koppelung der Elektronen untereinander beruht, die oberhalb des Sprungpunkts gestört ist. Die Supraleitung soll dann verschwinden, wenn den Elektronen auf irgendeine Weise eine Energie größer als die Koppelungsenergie zugeführt wird. Es werden verglichen die thermische Energie (d. h. spezifische Wärme der Elektronen); Energie in einem Magnetfeld und diejenige hochfrequenter Schwingungen (durch das entsprechende $h\nu$). Die hieraus gewonnenen Daten stehen in befriedigender Übereinstimmung. Ferner stehen die Anomalien der thermoelektrischen Erscheinungen in der Umgebung des Sprungpunktes in Einklang mit dem Bild der spontanen Koppelung.

Nordheim (Göttingen).

Frenkel, J.: On a possible explanation of superconductivity. Physic. Rev., II. s. 43, 907—912 (1933).

Von verschiedenen Seiten war die Idee ausgesprochen worden, daß ein Supraleiter in dem Sinne analog zu einem Ferromagneten ist, daß der stromführende Zustand

thermodynamisch stabiler ist als der stromlose, so daß das Metall unterhalb der kritischen Temperatur immer einen Strom führen würde, wobei sich nur makroskopisch im allgemeinen verschiedene Stromfäden kompensieren würden, solange kein äußeres Feld wirkt. Diese Überlegungen werden ausführlich wiedergegeben und gezeigt, daß sowohl magnetische Kräfte wie Austauschkräfte in dem Sinne wirken, den stromführenden Zustand gegenüber dem stromlosen energetisch zu begünstigen. Es wird jedoch nicht gezeigt, daß es möglich ist, Fälle zu finden, in denen diese Kräfte den ersten Zustand wirklich zu einem Energieminimum machen. *R. Peierls (Cambridge).*

Fowler, R. H.: Report on the theory of semi-conductors. Physik. Z. Sowjetunion 3, 507—528 (1933).

Bericht über den jetzigen Stand der Theorie der Halbleiter. Es werden behandelt: Die Modelle für einen Halbleiter und die Zahl der Leitungselektronen, Leitfähigkeit, Halleffekt, Widerstandsänderung im Magnetfeld, Volta Potential, Austrittsarbeit, innerer Photoeffekt, Gleichrichterwirkung von Kontakten. *Nordheim (Göttingen).*

Fowler, R. H.: An elementary theory of electronic semi-conductors, and some of their possible properties. Proc. Roy. Soc. London A 140, 505—522 (1933).

Die Theorie der Halbleiter wird in vereinfachter Weise durchgeführt. Es werden dabei 3 Typen unterschieden: 1. Gewöhnliche Halbleiter (reine Substanzen, die zwei nur wenig getrennte Zonen von Elektronenzuständen besitzen, von denen die untere bei $T = 0$ gerade besetzt ist); 2. Substanzen mit Verunreinigungen, die leicht anregbare Elektronen liefern; 3. Substanzen mit Verunreinigungen, die angeregte Elektronen absorbieren können und bei denen dann „Löcher“ zurückbleiben. Es werden Formeln angegeben für die glüh- und photoelektrische Austrittsarbeit, das Kontaktpotential, die Leitfähigkeit, den Hallkoeffizient und die Thermokraft, und die Möglichkeiten für das Auftreten anomaler Vorzeichen für die letzten beiden Effekte diskutiert.

Nordheim (Göttingen).

Born, M., und M. Blackman: Über die Feinstruktur der Reststrahlen. Z. Physik 82, 551—558 (1933).

Ein harmonisch gebundenes Gitter vom Steinsalztypus kann bekanntlich — bei gegebener Einfallrichtung des Lichts — nur auf eine ultrarote Frequenz optisch ansprechen. Diese fällt näherungsweise mit der maximalen Eigenfrequenz des Systems zusammen (Reststrahlen). Berücksichtigt man die Anharmonizität, so kann im Prinzip jede Eigenschwingung ansprechen, jedoch mit ganz verschiedenen Intensitäten. Verf. zeigen, daß Absorption hauptsächlich in der Nähe der Frequenzen $\omega_1 + \omega_2$ und $\omega_1 - \omega_2$ (ω_1 Minimalfrequenz des „optischen“, ω_2 Maximalfrequenz des „akustischen“ Zweiges) groß sein wird. Diese Frequenzen bedeuten also Nebenmaxima der Reststrahlen und scheinen mit der beobachteten Feinstruktur der Reststrahlen im Einklang zu sein.

R. Peierls (Cambridge).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Carleman, Torsten: Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann. Ark. Mat. Astron. Fys. 23 A, Nr 22, 1—7 (1933).

Zusammenstellung der Methoden und Resultate einer indessen veröffentlichten Arbeit. Als Beispiel für die Behandlung allgemeinerer Fragestellungen aus der kinetischen Gastheorie wird in der Differentialgleichung für die Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta} = T(F),$$

wobei ξ, η, ζ die Geschwindigkeitskomponenten bedeuten, X, Y, Z die Komponenten der äußeren Kräfte, das Funktional 2. Ordnung $T(F)$ auf Integralform gebracht. Unter der Annahme des Fehlens äußerer Kräfte wird von der nach Ausführung der Substitution $F = e^{-r^2} + e^{-\frac{1}{2}r^2}\varphi$, $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ erhaltenen Integrodifferentialgleichung

für φ eine von y und z unabhängige Lösung gesucht, die für $t = 0$ gegebene Werte annimmt, dgl. auf den Ebenen $x = \sigma$ und $x = \pi$ zu allen Zeiten. Durch Fourierreihenansatz in x erhält man ein System unendlich vieler Integrodifferentialgleichungen, denen die Fourierkoeffizienten genügen müssen, nebst gewissen Anfangsbedingungen. Die Unbekannten gehen höchstens quadratisch ein. Daß diese Gleichungen genau ein Lösungssystem besitzen und zu einer Lösung des Ausgangsproblems führen, wird durch Übergang zu einer Fredholmschen Integralgleichung bewiesen. Aufzählung weiterer Fälle, in denen die Methode anwendbar ist. (Vgl. dies. Zbl. 6, 400.) *R. Iglisch.*

Ornstein, L. S., und W. R. van Wijk: Das Entstehen einer kanonischen Gesamtheit. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 36, 272–275 (1933).

In einem aus sehr vielen gleichen Teilchen bestehenden System, das mit einem zweiten System von sehr großem Energieinhalt in Wechselwirkung steht, stellt sich bekanntlich nach sehr langer Zeit die kanonische Energieverteilung $N_0(\varepsilon)$ ein. Vor Erreichung des stationären Gleichgewichtes wird die Energieverteilungsfunktion auch noch die Zeit als Parameter enthalten, also von der Gestalt $N(\varepsilon, t)$ sein; es wird versucht für $N(\varepsilon, t)$ eine Differentialgleichung abzuleiten unter der Annahme, daß zwischen dem Energiewert ε zur Zeit $t + \tau$ und dem Werte ε' zur Zeit t die Beziehung $\varepsilon = \varepsilon' - \beta t (\varepsilon' - \varepsilon_0) + \Delta$ besteht, worin im virtuellen Mittel $\overline{\Delta} = 0$ und $\overline{\Delta^2} = D \tau$ gelten soll und β und D Konstanten sind. Die so erhaltene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung hat, wie zu erwarten, die Gestalt der verallgemeinerten Diffusionsgleichung, deren stationäre Lösung in der Tat die kanonische Verteilung $N_0(\varepsilon)$ liefert. Es ergibt sich hiermit die Möglichkeit, auch nichtstationäre Verteilungen als Lösungen der Differentialgleichung zu gewinnen, in denen dann die Konstante $\frac{1}{\beta}$ die Rolle einer Relaxationszeit spielen wird. *Fürth (Prag).*

Potoček, Jan: Contribution à la théorie du mouvement Brownien. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 171, 1–13 u. franz. Zusammenfassung 14–16 (1933) [Tschechisch].

Setzen wir voraus, daß ein Punkt sich auf einer Gerade (x -Achse) im Intervalle $(0, h)$ bewegt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $u(x_0, x, t)$, daß der bewegliche Punkt in der Zeit t aus dem Punkte x_0 in den Punkt x übergeht, sei eine positive stetige Funktion der Veränderlichen x_0, x, t die der Smoluchowskischen Funktionalgleichung genügt

$$u(x_0, x, t_1 + t_2) = \int_0^h u(x_0, \xi, t_1) \cdot u(\xi, x, t_2) d\xi.$$

Weiter sei $\int_0^h u(x_0, x, t) dx = 1$. ϑ sei eine beliebige positive Zahl, $\alpha(x)$ eine im Intervalle $(0, h)$ definierte Funktion. Bezeichnen wie mit x_n die Koordinate des beweglichen Punktes in der Zeit $n\vartheta$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_0, x, n\vartheta) = u(x)$, unabhängig von x_0 . [B. Hostinský, Application du Calcul des Probabilités à la théorie du mouvement Brownien (Ann. Inst. H. Poincaré 3, Kap. IV; dies. Zbl. 6, 266).]

Für den Mittelwert $\mathfrak{M} \alpha(x_n) = \int_0^h u(x_0, x, n\vartheta) \alpha(x) dx$ gilt ähnlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M} \alpha(x_n) = \bar{\alpha} = \int_0^h u(x) \alpha(x) dx.$$

Weiter existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M} \frac{1}{n} (\alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \dots + \alpha(x_n) - n\bar{\alpha})^2 = \frac{1}{2} C$$

(Dispersion). C hängt von ϑ ab. Diese Abhängigkeit wird im Falle der linearen Brownschen Bewegung im Intervalle $(0, h)$ betrachtet, wobei vorausgesetzt wird, daß auf die Teilchen die Kraft $f(x)$ wirkt. Es wird besonders betrachtet: a) die kraftlose Bewegung, b) der Fall der konstanten Kraft (Schwere), c) der Fall der elastischen Kraft $f(x) = -\alpha x$.

K. Rychlik (Prag).

Rocard, Yves: Théorie des fluctuations et opalescence critique. J. Physique Radium VII. s. 4, 165—185 (1933).

Die klassischen Arbeiten von Smoluchowski und Einstein über die Intensität des von einem Gase in der Nähe des kritischen Zustandes oder einem Flüssigkeitsgemisch in der Nähe des kritischen Mischungspunktes zerstreuten Lichtes ergeben für den kritischen Punkt selbst unendlich große Werte. Um Formeln zu erhalten, die auch hier noch Geltung haben, wird zunächst die Schwankungsarbeit berechnet unter Zugrundelegung einer van der Waalschen Zustandsgleichung, die für den Fall eines nichtstationären, im Schwankungszustande befindlichen Systems verallgemeinert ist. Um den so erhaltenen allgemeinen Ausdruck auswerten zu können, ist es notwendig, ein

Integral von der Gestalt $\int_0^{\Delta \varrho} \left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} \right) \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \frac{1}{\Lambda^2} \left(\frac{\Delta \varrho}{\varrho} \right)^2$ zu berechnen, worin ϱ

die Dichte als Funktion des Ortes, $\Delta \varrho$ die Größe der lokalen Dichteschwankung bedeutet. Dies gelingt, wenn man nach dem Vorgang von Debye die Dichteschwankung aus einem kontinuierlichen Spektrum von Schallwellen zusammensetzt, die in dem betrachteten Körper laufen. Die Größe Λ hat die Bedeutung einer mittleren Wellenlänge dieser Wellen. Aus dem so erhaltenen Ausdruck für die Schwankungsarbeit erhält man mit Benützung des Boltzmannschen Prinzips nach dem Vorgange von Smoluchowski die Intensität des Rayleighschen Streulichtes. Die Formel bleibt auch im kritischen Punkt selbst gültig und enthält außer beobachtbaren Größen noch Λ und den Radius der molekularen Wirkungssphäre σ . Ähnlich kann man im Falle der Konzentrationsschwankungen in Flüssigkeitsgemischen vorgehen. Die erhaltenen Formeln stehen in guter Übereinstimmung mit dem Experiment und liefern für Λ bei CO_2 den Wert $124 \cdot 10^{-8}$ cm. Die Theorie von Ornstein und Zernike wird einer Kritik unterzogen und es wird gezeigt, daß sie im Gegensatz zu der Formel des Verf. zu einem Ausdruck für die Lichtzerstreuung führt, der mit dem Experiment im Widerspruch steht.

Fürth (Prag).

Gerasimov, N.: Innere Reibung eines Gases und andere Fragen aus der Kinetischen Theorie. Physik. Z. 34, 387—388 (1933).

In the first section of this paper the law of distribution of relative velocities between molecules is deduced; the method and the result have, however, long been known (see, for example, Kinetic Theory of Gases, H. W. Watson, Oxford Press, 1893, p. 12). In the second part of the paper a formula is obtained for the coefficient of viscosity, but the method used is not an accurate one, and the result does not agree with that given by the accurate theory. [S. Chapman, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A, 216, 279 (1915); D. Enskog, Dissertation, Upsala, 1917]. S. Chapman (London).

Roberts, O. F. T.: On the functional equation of eddy-diffusion. Mem. Roy. Meteorol. Soc. 4, 85—97 (1933).

Assuming that the density distribution due to scattering satisfies a functional equation expressing uniformity of scattering power, it is shown that the square of the standard deviation of matter scattered from a plane source varies as the time. The method used to get this result is extended so as to obtain the density distribution in a series of Hermite Polynomials, exhibiting directly the manner in which the distribution may differ from that due to the assumption of eddy scatter analogous to heat diffusion in a solid. The infinite differential equation corresponding to the functional equation is obtained; and the similar result for homogeneous scattering in three dimensions is derived and extended to scatter from a fixed point or line into a medium with uniform mean flow. The author states that his investigation appears to him to occupy the gap between the aspects of eddy-diffusion described by G. I. Taylor [Proc. London Math. Soc. (2) 20, 196 (1920): dealing with the minute structure of the eddying motion] and L. F. Richardson [Proc. Roy. Soc. London (A) 110, 709 (1926): dealing with experiments in which averages were taken over successively longer

periods, ranging from molecular diffusion to cyclones]. In this intermediate region Fick's equation does not necessarily hold good. *S. Chapman* (London).

Böhmer, P. E.: Die relativistische Energieverteilung in Gasen. *Physik. Z.* **34**, 454 bis 456 (1933).

Aus der von Busemann [*Physik Z.* **33**, 775 (1932); dies. Zbl. **5**, 280] angegebenen relativistischen Verteilung der Momente der Moleküle in einem idealen Gas läßt sich ohne weiteres die Verteilungsfunktion für die kinetische Energie und für die Gesamtenergie gewinnen. Diese Funktionen nehmen eine übersichtliche Gestalt an, wenn man als Einheitsmaß für die Energie entweder $m_0 c^2$ oder kT benützt. In beiden Fällen hängt die Verteilung nur von einem einzigen Parameter, $\tau = m_0 c^2/kT$ ab. Es läßt sich zeigen, daß der Verteilungsnenner und die Momente der Energieverteilungsfunktion in rationaler Weise durch die Hankelschen Zylinderfunktionen von den Indizes Null und Eins und vom Argumente $\tau\sqrt{-1}$ ausgedrückt werden können. *Fürth* (Prag).

La Mer, Victor K.: Chemical kinetics. The temperature dependence of the energy of activation. The entropy and free energy of activation. *J. chem. Phys.* **1**, 289—296 (1933).

Es wird von der Annahme ausgegangen, daß die aus den Temperaturkoeffizienten der Reaktionsgeschwindigkeit bestimmten Aktivierungsenergien prinzipiell temperaturveränderliche Größen sind. Diese Annahme macht die Einführung einer „Wärmekapazität der Aktivierung“ sowie einer Entropie und Freien Energie der Aktivierung, die analog bekannten thermodynamischen Formeln definiert werden, notwendig. Für die Geschwindigkeitskonstante k ergibt sich dann der Ausdruck

$$\ln k = \text{konst.} + \frac{1}{2} \ln T - F_{\text{act}}/RT,$$

wo F_{act} die Freie Energie der Aktivierung bedeutet. Für die neu eingeführten Größen werden statistische Formeln angegeben. An einigen Beispielen wird gezeigt, daß für Reaktionen in Lösungen in der Tat temperaturveränderliche Aktivierungsenergien gefunden wurden. Besonders wichtig dürfte die neue Betrachtungsweise für Ionenreaktionen sein, wie sich u. a. daraus ergibt, daß sie die von Brönsted gefundene empirische Gleichung für die Konzentrationsabhängigkeit der Geschwindigkeitskonstanten solcher Reaktionen abzuleiten gestattet. Jedoch ist der in ihr auftretende „Aktivitätskoeffizient des kritischen Komplexes“ eine kinetische Größe, die nur in speziellen Fällen mit der entsprechenden thermodynamischen Größe identisch wird. Die Übertragung der Hinshelwoodschen Stoßtheorie der Reaktionsgeschwindigkeit auf Reaktionen in Lösungen setzt voraus, daß die Aktivierungsentropie Null ist, was unwahrscheinlich erscheint; sie führt daher auch zu einigen unbefriedigenden Resultaten.

H. Ulich (Rostock).

Villey, J.: Éléments de thermodynamique cinétique. *Mém. Sci. physiques* Fasc. **23**, 1—64 (1933).

Brönsted, J. N.: On the definition of the Gibbs potential. *Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk.* **12**, Nr 6, 1—7 (1933).

Gegen die von Gibbs gegebene Definition des Chemischen Potentials als partieller Differentialquotient der Energie nach der Menge einer der Komponenten (bei konstantem Volum, konstanter Entropie und konstanter Menge der anderen Komponenten) sind in neuerer Zeit von mehreren Seiten, so von E. A. Milne, Th. de Donder und R. Defai, Einwendungen erhoben worden, die darauf beruhen, daß die Möglichkeit, die Stoffmengen als unabhängige Variable neben der Entropie zu betrachten, bezweifelt wird. Verf. erinnert daran, daß es tatsächlich möglich ist, einem System Stoffmengen ohne Entropieänderung zuzuführen, da etwaige Entropieänderungen durch rein thermische Prozesse unbeschränkt ausgeglichen werden können. Durch diese Erkenntnis ist die Zulässigkeit der Gibbsschen Definition hinreichend erwiesen. Zur numerischen Bestimmung des Chemischen Potentials ist, genau wie bei allen anderen thermodynamischen Funktionen, noch die Festlegung eines Standardzustandes not-

wendig. Ein spezieller Prozeß, der den Zusammenhang zwischen dem Chemischen Potential einer Komponente einer Mischung mit deren Energie, Entropie und Volumen in einem Standardzustand besonders deutlich hervortreten läßt, wird besprochen.

H. Ulich (Rostock).

Eisenschitz, R.: Nachtrag zu der Arbeit: „Über mehrphasige Gleichgewichte in Systemen, die durch Membranen unterteilt sind“. Z. physik. Chem. A **164**, 393 (1933).

Es wird darauf hingewiesen, daß das in der früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **5**, 428) behandelte Problem bereits vorher von zwei Autoren (Schreinemakers und Kubelka) bearbeitet wurde.

H. Ulich (Rostock).

Castellano, V.: Sulla interpretazione dinamica del rapporto di concentrazione. Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 268—274 (1933).

Fischer, V.: Die Verdampfungswärmen der binären Gemische. Ann. Physik, V. F. **17**, 209—220 (1933).

Für binäre flüssige Gemische werden folgende Arten von Verdampfungswärmen definiert: $r_{p,T}$, gehörend zum isobar-isothermen Übergang vom flüssigen Gemisch in den koexistierenden Dampf; r_{p,p_0} , gehörend zum isobaren Übergang aus dem flüssigen Gemisch in die Dampfphase gleicher Zusammensetzung; r_{T,p_0} , gehörend zum isothermen Übergang aus dem flüssigen Gemisch in die Dampfphase gleicher Zusammensetzung. Die zwischen diesen Größen sowie zwischen ihnen und der Mischungswärme bestehenden Zusammenhänge werden abgeleitet. *H. Ulich* (Rostock).

Press, A.: Multiple entropy and the two fundamental laws of thermodynamics. Physik. Z. Sowjetunion **3**, 487—506 (1933).

The author considers it advantageous to use dP , defined by $dP = dE + p dv$, rather than the quantity of heat dQ , defined by $dQ = dE + dW$, especially in problems of "free expansion" the symbols p, v, E, W have their usual thermodynamic significance. He further suggests the advantage of using a more general integrating factor of $dE + p dv$ than that which leads to the entropy defined in the usual manner. The resulting integrals are what he calls "multiple entropy". [He does not make clear how far he regards his proposals as merely convenient mathematical devices, and how far he wishes to interpret them as extending the fundamental laws of thermodynamics, which they fail to do. Ref.]

W. H. McCrea (London).

Sugita, Motoyosi: Bemerkung über den Planckschen Beweis des zweiten Wärmesatzes. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **15**, 108—113 (1933).

Der Plancksche Beweis des zweiten Wärmesatzes (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1926**, 453) wird auf Systeme mit mehr als zwei Variablen erweitert. *H. Ulich*.

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Muskat, Morris: The theory of refraction shooting. Physics **4**, 14—28 (1933).

Die Schwierigkeit vom Standpunkt der geometrischen Optik aus den Energietransport längs der Grenzfläche zweier Medien mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 und den Dichten γ_1 und γ_2 zu erklären, veranlaßt Verf., dieses umstrittene Gebiet der experimentellen Seismik wellentheoretisch zu behandeln und die von Jeffreys für Flüssigkeiten gegebenen Beziehungen auch auf ein riges Mittel auszudehnen. In einer homogenen Flüssigkeit führt eine Störung von der Form:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2\pi(\varrho^2 + (z - \bar{h})^2)^{1/2}} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} d\omega \int_0^{a/v_1} f(\mu) e^{i\omega[\mu + t - (\varrho^2 + (h - z)^2)^{1/2}/v_1]} d\mu$$

auf die reflektierte Welle:

$$\Phi_r = \frac{-1}{2\pi\varrho} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} d\omega \int_0^{a/v_2} f(\mu) e^{i\omega(\mu + t - \varrho/v_1 - (h + z)^2/2\varrho v_1)} d\mu$$

und auf die gebrochene Welle

$$\Phi_{r_2} = \frac{-i v_1^3}{\pi k v_2 \beta^2 \varrho^2} \int_{-\infty - i c}^{+\infty - i c} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{a/v_1} f(\mu) e^{i\omega(\mu + t - \varrho/v_2 - \beta(h+z)/v_1)} d\mu$$

(ϱ und z Zylinderkoordinaten).

Es ergibt sich hieraus, daß bei der direkten und der reflektierten Welle die vertikale Verrückung abnimmt mit $1/\varrho^2$, die radiale mit $1/\varrho$, wohingegen beide Verschiebungsanteile für die gebrochene Welle abnehmen mit $1/\varrho^2$. Für Entfernungen ϱ , die groß sind im Vergleich zur Schichtdicke h , folgt, daß die vertikale Verrückung für gebrochene und reflektierte Wellen gleich ist. — Für ein riges Mittel ergibt sich eine ganze Anzahl gebrochener und reflektierter Wellen (longitudinaler und transversaler Art). Neben den normalen gebrochenen Wellen, die dem Fermatschen Prinzip genügen, sei besonders hingewiesen auf jene, die als longitudinale bzw. als transversale Welle senkrecht bis zur Grenzschicht geht, um dann an der Grenzfläche entlang mit transversaler Geschwindigkeit im oberen Medium zu laufen, von wo sie wieder als longitudinale bzw. als transversale nach oben geht.

Brockamp (Kopenhagen).

Jung, Heinrich: Über Erdbebenwellen. IX. Die Schattenwirkung des Erdkerns für die seismischen Raumwellen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen II, Nr 37, V, Nr 4, 42—80 (1933).

As a preparation for new computations of the velocity of longitudinal waves in the core of the earth, the conditions under which a seismic "shadow" may exist are treated. A shadow is produced not only by the discontinuous decrease of velocity conceived by Wiechert, but also by a continuous decrease, provided $\frac{dv}{dr} > v/r$. In the earth, this condition corresponds to a change in velocity of 4 km./sec. in 100 km. at the core boundary. A series of examples is given, showing the influence upon the travel time curves and upon the ray paths of varying types of transitions between the outer shell and the lower speed core. As is well known, the Herglotz-Wiechert interpretation method fails when a "core shadow" occurs. Alternative methods for overcoming this deficiency are also unsatisfactory. Certain peculiarities of the rays and of the travel time curves which result for special types of core boundary are examined. The relation of the results to the similar problems in atmospheric seismology and in the propagation of electromagnetic waves in the atmosphere is indicated. (Concerning a related problem, see this Zbl. 6, 95.)

Slichter (Cambridge).

Stehberger, K. H.: Versuche über eine Bestimmung der erdmagnetischen Totalintensität aus der Umlaufzeit langsamer Elektronen. Ann. Physik, V. F. 17, 278—292 (1933).

Swann, W. F. G.: A mechanism of acquirement of cosmic-ray energies by electrons. (Ein Beitrag zur Frage, ob die Energie kosmischer Strahlen von Elektronen erreicht werden.) Physic. Rev., II. s. 43, 217—220 (1933).

Für die an der kosmischen Strahlung beteiligten Elektronen wird eine Energie vom Grade 10^{10} Volt gefordert, ein Wert, der theoretischen Schwierigkeiten begegnet. Der Verf. beleuchtet das Problem neu, indem er bei seiner Theorie von Magnetfeldern in Sternflecken, ähnlich den Sonnenflecken ausgeht, die gemäß Faradays Gesetz von der elektromagnetischen Induktion bei elektrischen Feldern eine derartige Stärke erreichen sollen, daß sie die erforderliche Elektronenenergie hervorrufen. Bestehende Beziehungen zwischen Sonnenfleckentätigkeit einerseits und erdmagnetischen Störungen und Polarlichterscheinungen andererseits sind nachgewiesen. Doch würden die Ausmaße der Sonnenflecken höchstens ausreichen, um Energien vom Grade 10^9 zu liefern, so daß hinsichtlich der kosmischen Strahlung andere Sterne herangezogen werden müssen. Nach den Gleichungen von Lagrange und Hamilton entwickelt der Verf. unter gewissen vereinfachenden Annahmen eine Reihe von Formeln, aus denen sich

für den Energiebetrag der Ausdruck $V = 300H_0 R t / \tau$ ergibt. Hierin bedeutet τ die Zeit, die nötig ist, daß die Feldintensität H_0 erreicht wird, R den Radius und t die Zeit. Aus einem Zahlenbeispiel mit $R = 3 \times 10^{10}$, $H_0 = 2000$ Gauß, $\tau = 10^6$ und $t = 1$ Sekunde wird $V = 2 \times 10^{10}$ Volt gefunden und gefolgert, daß bei Annahme von Magnetfeldern, die sich bei Sternflecken über weite Gebiete erstrecken, verhältnismäßig geringe Änderungen dieser Felder zu hohen Elektronenenergien führen. Was die Verlustmöglichkeit bei einem Zusammenstoß mit Atomen betrifft, so lautet die Ansicht dahin, daß der Vorgang der Energiesteigerung nur in geringem Maße bei solchen Zusammenstößen beeinträchtigt wird. Durch die von den Magnetfeldern erzeugten Ströme wird das Elektron dann vom Sternfleck weg in den Raum geschleudert. *Fritz Händel.*

Becker, Richard: Atmosphärische Luftverlagerungen bei innerer Reibung unter Berücksichtigung der Erdrotation. (*Deutsche Seewarte, Hamburg.*) Ann. Hydrogr. **61**, 89—94 (1933).

Verf. erweitert seine früheren Untersuchungen (Der Einfluß der Reibung auf die Form der Luftpörpergrenzflächen bei Kältevorstößen und Rückzügen, Ann. Hydrogr. **1932**, 489—496) durch Berücksichtigung der dritten Dimension und der ablenkenden Kraft der Erdrotation. Die Grundströmung (\bar{v}_x, \bar{v}_y) des geostrophisch-antitriptischen Windfeldes

$$l\bar{v}_y - \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad -l\bar{v}_x - \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

(ϱ, p = Dichte, Druck, $l = 2\omega \sin \varphi$, ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, φ geographische Breite, μ = molarer Reibungskoeffizient, z = vertikale Koordinate; x, y, z = Linkssystem) mit den Lösungen (Koordinatensystem nach $\partial p / \partial y = 0$ orientiert):

$$\bar{v}_x = -\frac{1}{l\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \exp\left(-z\sqrt{\frac{\varrho l}{2\mu}}\right) \cdot \sin\left(z\sqrt{\frac{\varrho l}{2\mu}}\right);$$

$$\bar{v}_y = -\frac{1}{l\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{1 - \exp\left(-z\sqrt{\frac{\varrho l}{2\mu}}\right) \cdot \cos\left(z\sqrt{\frac{\varrho l}{2\mu}}\right)\right\},$$

wird eine Störung von der Form $\Delta v_x = V \cdot \cos(lt + \alpha)$, $\Delta v_y = V \cdot \sin(lt + \alpha)$ für $z \rightarrow \infty$ superponiert. Die Lösungen der Störungsgleichungen

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + l v_y - \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} - l v_x - \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

die mit $v_x = \bar{v}_x + \Delta v_x$, $v_y = \bar{v}_y + \Delta v_y$ unter den Randbedingungen:

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(\infty, t) = \bar{v}_x(\infty) + V \cos(lt + \alpha), \quad v_x(z, 0) = \bar{v}_x(z) + V \cos(\alpha), \quad v_x(z, \infty) = \bar{v}_x(z),$$

$$v_y(0, t) = 0, \quad v_y(\infty, t) = \bar{v}_y(\infty) + V \sin(lt + \alpha), \quad v_y(z, 0) = \bar{v}_y(z) + V \sin(\alpha), \quad v_y(z, \infty) = \bar{v}_y(z),$$

lauten:

$$v_x(z, t) = \bar{v}_x + V \cdot \cos(lt + \alpha) \cdot \Phi\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{l}{\mu t}}\right), \quad v_y(z, t) = \bar{v}_y + V \cdot \sin(lt + \alpha) \cdot \Phi\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{l}{\mu t}}\right)$$

(Φ = Fehlerintegral) werden hinsichtlich ihrer meteorologischen Konsequenzen diskutiert. *H. Ertel (Berlin).*

Findeisen, Walter: Über Wasserdampfübersättigungen in Wolken. Beitr. Physik frei. Atmosph. **20**, 157—173 (1933).

Zwei Fragen werden kolloidmeteorologisch behandelt: 1. Welche Wasserdampfübersättigungen können in aufsteigenden Wolken im Gleichgewicht bestehen? 2. Wie schnell stellt sich der Gleichgewichtszustand ein? Ausgehend von Betrachtungen über den Diffusionsaustausch zwischen der Luft und der in ihr suspendierten Tropfen wird eine Formel für den Gleichgewichtswert der Übersättigung aufgestellt, die als Variable Druck, Temperatur, Vertikalgeschwindigkeit, Tropfengröße und Tropfenzahl in der Wolke enthält. Ein stabiler Gleichgewichtszustand der Übersättigung stellt sich sowohl in aufsteigenden als auch in ruhenden Wolken sehr rasch ein. Eine Formel für die Einstellungsdauer des Gleichgewichtszustandes der Übersättigung wird abgeleitet. Die Formeln selbst finden Anwendung auf Resultate aerologischer Messungen. *Fritz Hänsch (Aachen).*